

0 1. 静電界

(1) 点電荷の作る電界・電位

真空中にある点電荷 Q_1 [C] が、ある場所 \mathbf{r} [m] (原点を点電荷に取る) に作り出す電界 \mathbf{E} [V/m] は、真空の誘電率を ϵ_0 [F/m] として、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad E = |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

場所 \mathbf{r} に作り出す電位 V [V] は、

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(2) 点電荷の間に働く力

真空中にある2個の点電荷 Q_1 [C], Q_2 [C] の間に働く力 F [N] は、2点間の距離を r [m] (Q_1 を原点とした位置ベクトル \mathbf{r})、真空の誘電率を ϵ_0 [F/m] として、

$$\vec{F} = Q_2 \vec{E} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad |\vec{F}| = F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

02. コンデンサと静電界

(1) 静電容量

以下共通...真空の誘電率： ϵ_0 誘電体の誘電率： ϵ 誘電体の比誘電率： ϵ_r

平行平板 極板面積： S 極板間： d

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad \epsilon \text{が比誘電率} \epsilon_r \text{で表されているなら、} \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

同心球 内球の外径： a 外球の内径： b ($a < b$)

$$\text{外球が基準電位の時：} \quad C = 4\pi\epsilon \frac{ab}{b-a} \quad \leftarrow \text{普通はこっち}$$

$$\text{内球が基準電位の時：} \quad C = 4\pi\epsilon \frac{b^2}{b-a}$$

孤立球 球の外径： a $C = 4\pi\epsilon a$ 周囲が真空なら $C = 4\pi\epsilon_0 a$

2本の平行導線 (単位長) 各々の線径： a, b 線間隔： d ($a, b \ll d$)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(d^2 / ab)} \quad a = b \text{なら} \quad C = \frac{\pi\epsilon_0}{\log(d/a)}$$

02. コンデンサと静電界

(1) 静電容量 (続き)

同軸円筒 (単位長) 内部導体の外径 : a 外部導体の内径 : b ($a < b$)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(a/b)}$$

(2) 電界と力

平行平板コンデンサの電極間に働く力

(極板間の電位を V 、電荷を Q とする)

$$F = \frac{\epsilon_0 V^2 S}{2d} \quad \leftarrow \text{電位一定の場合} \qquad F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad \leftarrow \text{電荷一定の場合}$$

無限長の平行導線の電線間に働く力 (単位長あたり)

(線間の電位を V 、線径を a 、距離を d とする)

$$F = -\frac{\pi\epsilon_0 V^2}{2d \{\log(d/a)\}^2}$$

02. コンデンサと静電界

(3) 物質の境界面と電界

一様な電界中にある物質の境界面の解析 誘電率が ε_1 の物質1と誘電率 ε_2 の物質2が平面で境界をなして、物質1の中で一様な電界 E_1 が、境界面に入射角 θ_1 で入っている時の境界面での電界の様子を解析する。

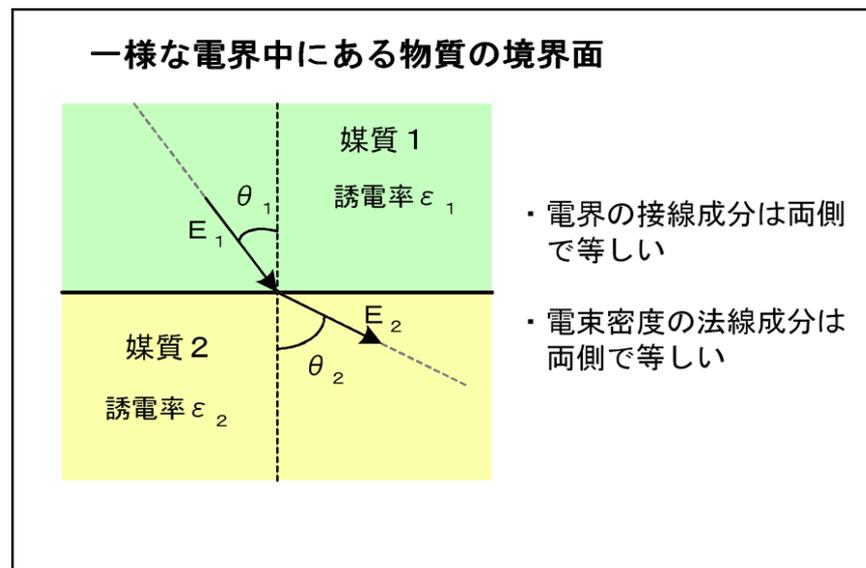
I 電界の接線成分は両側で等しい

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

II 電束密度の法線成分は両側で等しい

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$$

$$\therefore \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$



02. コンデンサと静電界

(4) その他もろもろ

損失のある誘電体

比誘電率が $\varepsilon = \varepsilon_r - j\varepsilon''$ で表される誘電体を作るコンデンサの、 $G + j\omega C$ の等価回路は、（比誘電率の実数部： ε_r 損失分： ε'' 誘電正接： $\eta = \varepsilon''/\varepsilon_r$ ）

$$j\omega \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = j\omega \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - j\varepsilon'') S}{d} = G + j\omega C \quad \text{と書ける。よって、}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \quad G = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon'' S}{d} = \omega \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_r} \right) \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \right) = \omega \eta C$$

表面電荷密度を持つ平面とそれが作る電界

表面に一様な電荷密度 σ を持つ導体の無限平面での電界 E を求める問題

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{片面だけの電荷} \\ \text{を考える場合} \end{array}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{両面の電荷を考} \\ \text{える場合} \end{array}$$

完全導体の表面では、**電界は表面に垂直に出入り**する

03. インダクタ・電流と磁界

(1) 様々な電流が作る磁界

ビオ・サバールの法則 (微分形)
 線状電流素片 $I ds$ から位置ベクトル r にある点 P の磁界 dH は、

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \times r}{r^3}$$

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \sin\theta}{r^2}$$

電流の作る磁界はビオ・サバールの法則が基本

(1) 直線電流 (3) 円形電流 (6) 矩形電流
 (2) 有限長直線電流 (4) 円形電流×2 (7) 矩形電流 (中心軸上)
 (5) 円弧の一部

無限長の直線電流 半径 : a 電線から距離 r の点での磁界 H

導体内部 $r \leq a$ $H = \frac{rI}{2\pi a^2}$ 導体外部 $r > a$ $H = \frac{I}{2\pi r}$

有限長の直線電流 区間 AB AP と電流がなす角を θ_1 、 BP と電流がなす角を θ_2 P と電線の距離を r とすると、

$$H = \frac{I}{4\pi r} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

03. インダクタ・電流と磁界

(1) 様々な電流が作る磁界 (続き)

単一の円形電流 径 : a 円の中心 O から軸上の距離 x の点の磁界 H

$$H = \frac{a^2 I}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \text{中心 } O \text{ では } H = \frac{I}{2a}$$

2つの同一径、同一軸上の円形電流 (ヘルムホルツコイル)

径 : a 中心点間 : $2d$ 両者の中点 O から軸上の距離 x の点の磁界 H

$$H = \frac{a^2 I}{2} \left[\frac{1}{\left\{ a^2 + (d + x)^2 \right\}^{3/2}} + \frac{1}{\left\{ a^2 + (d - x)^2 \right\}^{3/2}} \right]$$

中心 O では $H = \frac{a^2 I}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$ $a = 2d$ とすると中心 O 付近で、この強さの一様な磁界が得られる

円弧の一部の電流 径 : a 中心角 : θ 円弧の中心における磁界 H は、

$$H = \frac{I\theta}{4\pi a}$$

03. インダクタ・電流と磁界

(1) 様々な電流が作る磁界 (続き)

長方形電流 長辺 : a 短辺 : b 長方形の中心軸上 x の点の磁界 H は、

$$H = \frac{2Iab}{\pi\sqrt{(a^2 + b^2 + 4x^2)}} \left(\frac{1}{a^2 + 4x^2} + \frac{1}{b^2 + 4x^2} \right)$$

$a = b$ の正方形の時は

$$H = \frac{2\sqrt{2}Ia^2}{\pi\sqrt{(a^2 + 2x^2)}} \frac{1}{a^2 + 4x^2}$$

$a \neq b$ で長方形の中心では

$$H = \frac{2Iab}{\pi\sqrt{(a^2 + b^2)}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

$a = b$ で正方形の中心では

$$H = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi a}$$

03. インダクタ・電流と磁界

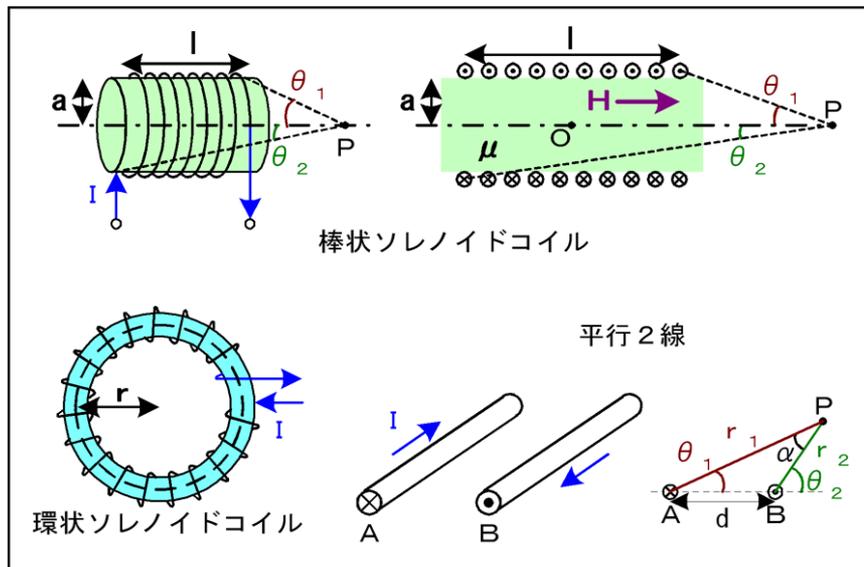
(1) 様々な電流が作る磁界 (続き)

棒状ソレノイドコイル

コア半径 : a 長さ : l 単位長あたりの巻き数 : n 中心軸上の点 P での磁界 H は

$$H = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

 θ_1 : P から最も手前の巻き線
までと中心軸の成す角

 θ_2 : P から最も奥の巻き線ま
でと中心軸の成す角


棒状ソレノイドコイル

平行2線

環状ソレノイドコイル

コイルが十分長 ($a \ll l$) い時の中心 O での磁界 H_0 は $H_0 = nI = \frac{NI}{2l}$

環状ソレノイドコイル

中心からの距離 : r 総巻き数 : N 中心から距離 r の点での磁界 H

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

03. インダクタ・電流と磁界

(1) 様々な電流が作る磁界 (続き)

平行2線 2線AとBに垂直な平面上の点Pを考える。この平面上で

θ_1 : 直線PAとABが成す角

θ_2 : 直線PBとBAが成す角

$PA = r_1$ $PB = r_2$ $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ とするとPでの磁界Hは、

$$\text{電流の向きが同じ場合} \quad H = \frac{I}{2\pi r_1 r_2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \alpha}$$

$$\text{電流の向きが逆の場合} \quad H = \frac{I}{2\pi r_1 r_2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha} = \frac{Id}{2\pi r_1 r_2}$$

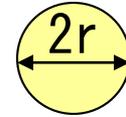
03. インダクタ・電流と磁界

(2) 自己インダクタンス

以下共通...真空の透磁率： μ_0 物質の透磁率： μ 物質の比誘電率： μ_r

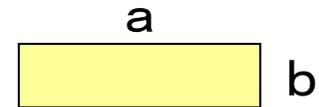
円形断面の導線（単線） 半径： r 長さ： l

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{2l}{r}\right) - 1 + \frac{r}{l} \right\}$$



矩形断面の導線 幅： a 厚さ： b 長さ： l

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{2l}{a+b}\right) + \frac{1}{2} + \frac{0.22(a+b)}{l} \right\}$$



幅広で薄い導線 幅： a 厚さ： $b \sim 0$ 長さ： l

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{2l}{a}\right) + \frac{1}{2} + \frac{0.224a}{l} \right\}$$



(2) 自己インダクタンス (続き)

平行2線 径：a 及び b 間隔：d 電線の透磁率： μ

$$L = \frac{\ell}{2\pi} \left\{ \mu_0 \ln \left(\frac{d^2}{ab} \right) + \mu \right\} \quad a = b \text{ なら} \quad L = \frac{\ell}{\pi} \left\{ \mu_0 \ln \left(\frac{d}{a} \right) + \frac{\mu}{4} \right\}$$

流れているのが高周波で、導体内部の電流を無視できるなら

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{d^2}{ab} \right) \quad a = b \text{ なら} \quad L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \left(\frac{d}{a} \right)$$

グラウンドプレーン上の単線 → 電気映像法を用いて平行2線の片側を計算

径：a 「地上」高さ：h 電線の透磁率： μ

$$L = \frac{\ell}{2\pi} \left\{ \mu_0 \ln \left(\frac{2h}{a} \right) + \frac{\mu}{4} \right\} \quad \text{高周波なら} \quad L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{2h}{a} \right)$$

03. インダクタ・電流と磁界

(2) 自己インダクタンス (続き)

同軸ケーブル 内部導体の外径 : a 外部導体の内径 : b
 誘電体の透磁率 : μ (高周波の場合。内部インダクタンスを無視)

$$L = \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

円形1ターンコイル 導体の径 : r コイルの径 : R
 (高周波の場合。内部インダクタンスを無視)

$$L = R\mu_0 \left\{ \ln\left(\frac{8R}{r}\right) - 2 \right\}$$

矩形1ターンコイル 導体の径 : r コイルの辺 : a 及び b
 (高周波の場合。内部インダクタンスを無視)

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ \begin{aligned} & -a \ln\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) - b \ln\left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \\ & + (a + b) \ln\left(\frac{2ab}{r^2}\right) + 2\sqrt{a^2 + b^2} - 2(a + b) \end{aligned} \right\}$$

03. インダクタ・電流と磁界

(2) 自己インダクタンス (続き)

環状ソレノイドコイル ドーナツの径 (平均磁路長) : R 巻き数 : N
 コアの断面径 : a コアの透磁率 : μ

$$L = \frac{\mu S}{\ell} N^2 = \frac{\mu a^2 N^2}{2R} \quad (\because \ell = 2\pi R, S = \pi a^2)$$

環状ソレノイドコイルの自己インダクタンス L は、

- ・ 巻き数 N の 2 乗に比例する
- ・ コアの透磁率に比例する
- ・ ドーナツの径に反比例する
- ・ コアの断面積に比例する

棒状ソレノイドコイル

コイルの長さ : l 巻き数 : N コアの断面径 : a コアの透磁率 : μ
 (単位長あたりの巻数 : $n = N/l$ コアの断面積 : $S = \pi a^2$)

コイルが十分長い時 : $2a \ll l$

$$L = \pi \mu a^2 n^2 l = \mu n^2 S l$$

コイルが長くない時 :

$$L = \pi \mu a^2 n^2 \left(\sqrt{a^2 + l^2} - a \right) = \mu n^2 S \left(\sqrt{a^2 + l^2} - a \right)$$

03. インダクタ・電流と磁界

(3) 磁気回路

起磁力 = $N I$ コイルの巻数 : N 電流 : I

磁気抵抗 = $l / \mu S$ (平均) 磁路長 : l 透磁率 : μ 断面積 : S

$$\therefore \text{磁束} = \text{起磁力} / \text{磁気抵抗} = N I / (l / \mu S) = \mu N I S / l$$

(4) インダクタに蓄えられるエネルギー

単独のコイル :
$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

結合した2個のコイル :
 $M = \text{相互インダクタンス}$
$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

(5) 相互インダクタンスと結合係数

結合した2個のコイルの合成インダクタンス
$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

結合係数 k と相互インダクタンス M の関係
$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

03. インダクタ・電流と磁界

(6) 相互インダクタンス

平行2線 相互作用長： l 間隔： d

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{d^2 + l^2} + l}{d} \right) - \frac{\sqrt{d^2 + l^2} - d}{l} \right\}$$

$d \ll l$ の時は

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{2l}{d} \right) - 1 \right\}$$

相対する2個の円形コイル 半径： a 及び b 中心間距離： d

$$M = \mu \sqrt{ab} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\}$$

$$k = \sqrt{\frac{4ab}{(a+b)^2 + d^2}}, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

03. インダクタ・電流と磁界

(6) 相互インダクタンス (続き)

相対する2個の円形コイル (続き)

径がほとんど同じで近接している場合 (要するに $a \doteq b$, $d \ll a$)

$$M = \mu a \left\{ \ln \frac{8a}{\sqrt{(a-b)^2 + d^2}} - 2 \right\}$$

径が同じで近接している場合 (要するに $a = b$, $d \ll a$)

$$M = \mu a \left(\ln \frac{8a}{d} - 2 \right)$$

重ね巻きしたソレノイドコイル

断面積 S_1, S_2 ($S_1 < S_2$)
 長さ l_1, l_2 ($l_1 > l_2$)
 巻き数 n_1, n_2 (単位長さあたり)

$$M = \mu n_1 n_2 \ell_2 S_1$$

03. インダクタ・電流と磁界

(6) 相互インダクタンス (続き)

重ね巻きしたトロイダルコイル

半径 R (=平均磁路長)
断面積 S_1, S_2 ($S_1 < S_2$)
巻き数 N_1, N_2 (全巻き数)

$$M = \frac{\mu N_1 N_2 S_1}{2\pi R}$$

04. マクスウェル方程式

(0) まずは式の形

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{c} = -\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \dots(1a)$$

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{c} = -\iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad \dots(1b)$$

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad \dots(1c)$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \dots(1d)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \dots(2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \dots(2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \dots(2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots(2d)$$

積分形

(1a) ...ファラデーの法則
(電磁誘導の法則)

(1b) ...アンペールの法則

(1c) ...ガウスの定理 (電荷)

(1d) ...ガウスの定理 (磁荷=0)

C : 任意の閉曲線

S : 任意の閉曲面

微分形

(2a) ...ファラデーの法則
(電磁誘導の法則)

(2b) ...ビオ・サバールの法則

(2c) ...ガウスの定理 (電荷)

(2d) ...ガウスの定理 (磁荷=0)

04. マクスウェル方程式

(0) まずは式の形 (続き)

媒質の特性を記述する式

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

(1) 電磁誘導による起電力

閉回路に生じる起電力 E は、その回路に鎖交する磁束 ϕ の時間変化率に等しい。磁束密度を B 、閉回路の面積を S とすると、 $\phi = BS$ なので、磁束が変化するか、回路の面積が変化するか、どちらかだとしてこれらを式にすると、

$$E = -\frac{d\phi}{dt} = -S \frac{dB}{dt} \quad \text{or} \quad -B \frac{dS}{dt}$$

(2) ローレンツ力

透磁率 μ の媒質中を、速度 \mathbf{v} で運動する電荷 q が磁界 \mathbf{B} から受ける力 \mathbf{F} を求める

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mu q(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$$

特に $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ の場合の力の大きさ F は、

$$F = |\mathbf{F}| = qvB = \mu qvH$$

04. マクスウェル方程式

(2) ローレンツ力 (続き)

ローレンツ力と一緒によく問われる遠心力 F_r は、運動の曲率を r 、物体の質量を m 、線速度を v (角速度を ω ; $v = r\omega$) として、

$$F_r = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

05. 電磁波の発生

(1) 微小ダイポールからの放射

波長 λ に比べて十分短い長さ l のダイポールに一様な電流 I が流れている場合の、電磁界を球面座標系 (r, θ, ψ) で考える。角周波数を ω とすれば、

$$E_r = -\frac{jI\ell}{2\pi\omega\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + j\frac{\beta}{r^2} \right) \cos\theta \exp(-j\beta r)$$

$$E_\theta = -\frac{jI\ell}{4\pi\omega\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + j\frac{\beta}{r^2} - \frac{\beta^2}{r} \right) \sin\theta \exp(-j\beta r)$$

$$E_\phi = H_r = H_\theta = 0$$

$$H_\phi = \frac{\beta}{\omega\mu} \left(-\frac{jI\ell}{4\pi\omega\epsilon} \right) \left(j\frac{\beta}{r^2} - \frac{\beta^2}{r} \right) \sin\theta \exp(-j\beta r)$$

が成り立つ。ここで、アンテナから十分離れた、つまり $r \rightarrow \infty$ の位置での電磁界を考えれば、 $1/r^2 \rightarrow 0$, $1/r^3 \rightarrow 0$ だから、 E_θ と H_ϕ の $1/r$ の項のみが残り、

$$E_\theta = ZH_\phi, \quad H_\phi = j\frac{I\ell}{2\lambda r} \sin\theta \exp(-j\beta r)$$

05. 電磁波の発生

(1) 微小ダイポールからの放射 (続き)

また、 $r = \lambda / 2\pi (= 1/\beta)$ の距離では $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ の項が等しくなる。
 $1/r^3$ の項を **静電界**、 $1/r^2$ の項を **誘導界**、 $1/r$ の項を **放射界** という。

(2) 微小ループからの放射

波長 λ に比べて十分小さい、面積 S のループに一様な電流 I が流れている場合の電磁界を球面座標系 (r, θ, ψ) で考える。角周波数を ω とすれば、

$$H_r = \frac{IS}{2\pi} \left(\frac{1}{r^3} + j \frac{\beta}{r^2} \right) \cos \theta \exp(-j\beta r)$$

$$H_\theta = \frac{IS}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} + j \frac{\beta}{r^2} - \frac{\beta^2}{r} \right) \sin \theta \exp(-j\beta r)$$

$$H_\phi = E_r = E_\theta = 0$$

$$E_\phi = \omega\mu \left(-\frac{jIS}{4\pi} \right) \left(j \frac{\beta}{r^2} - \frac{\beta^2}{r} \right) \sin \theta \exp(-j\beta r)$$

微小ダイポールの式と見比べると、電界 E と磁界 H が入れ替わっている、係数が異なるだけで、 $1/r^3$ の項、 $1/r^2$ の項、 $1/r$ の項があることは全く同じ

06. 電磁波の伝搬

(1) 自由空間での平面波の特性

自由空間（ここで言う自由空間とは $\sigma=0$ だが真空ではないケースも含める）でマクスウェル方程式を解く。方程式の形はいわゆる**電信方程式**...

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

電信方程式自体は自由空間でなくても成り立つ。ここでは、天下りの的に平面波を仮定するが、電磁波の発生プロセスで、微小ダイポールや微小ループで波源からの距離 $r \rightarrow \infty$ で平面波と扱えることが示される。

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

この解は、平面波の進行方向を z 軸として、 x 軸方向の単位ベクトルを \mathbf{i} 、 y 軸方向の単位ベクトルを \mathbf{j} 、電界の x 成分と y 成分をそれぞれ E_x 、 E_y 、磁界の x 成分と y 成分をそれぞれ H_x 、 H_y とすると、

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x \cos(\omega t \pm \beta z) + \mathbf{j}E_y \cos(\omega t \pm \beta z)$$

複号同順

$$\mathbf{H} = \mathbf{i}H_x \cos(\omega t \pm \beta z) + \mathbf{j}H_y \cos(\omega t \pm \beta z)$$

と表せる。複号の $-$ は進行波を示し、 $+$ は後退波を示す。 ω は、電磁波の角周波数。次に、位相定数 β について考える。 ε 及び μ は、真空のそれを ε_0 、 μ_0 、比誘電率、比透磁率を ε_r 、 μ_r として、

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

06. 電磁波の伝搬

(1) 自由空間での平面波の特性 (続き)

と表せる。この平面波の進行速度 v は、 ϵ と μ を使って、

$$V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

となるが、真空中の光速 c 、及び屈折率 n の式

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \quad n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \quad \text{を使えば、} \quad V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}$$

となる。つまり、比誘電率や比透磁率が k 倍になれば、 v や λ は $1/\sqrt{k}$ になる

β は伝搬速度 v 、周波数 f ($=\omega/2\pi$) より、 $\beta = \frac{2\pi f}{V} = \frac{\omega}{V}$ が成り立つ。

電界、磁界の各成分と特性インピーダンスについて考える。 ϵ や μ がスカラーで表される媒質では、電界と磁界は直交するから、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_x H_x + E_y H_y = 0$$

が成り立つ。

06. 電磁波の伝搬

(1) 自由空間での平面波の特性 (続き)

また、各成分の間には $Z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ の関係があるので、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad Z_r = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad \text{と置けば、} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = Z_r Z_0$$

となる。Zをこの媒質の特性インピーダンス、 Z_0 を真空の特性インピーダンスという。損失のある媒質の場合は、

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ \mu_r &= \mu' - j\mu'' \end{aligned} \quad \text{と書き換えて、} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\mu' - j\mu''}{\epsilon' - j\epsilon''}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu' - j\mu''}{\epsilon' - j\epsilon''}}$$

と表せる。

(2) 伝導度が有限の媒質中の伝搬

伝導度 σ がゼロでない場合は、上記の誘電率や透磁率の損失項とは別の扱いで計算する。まず伝搬定数 k は、

$$k = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \mu \sigma} \quad \text{以下、} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

06. 電磁波の伝搬

(2) 伝導度が有限の媒質中の伝搬 (続き)

次に、特性インピーダンス Z_C は、

$$Z_C = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\omega\varepsilon - j\sigma}}$$

となり、 $\sigma=0$ の場合と異なり、**複素数であること、周波数に依存すること**に注意する。

Z_C を真空の特性インピーダンス Z_0 と書けば、

$$Z_C = Z_0 / \sqrt{\varepsilon_r \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \right)}$$

先の伝搬定数 k に戻り、これを $k = \beta - j\alpha$ と置いて、 α と β を求めると、

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1}, \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1}$$

と求められるが、下記のように近似式でも求められる。

$$\begin{array}{l} (\sigma / \omega\varepsilon)^2 \ll 1 \text{ の時} \\ \text{(絶縁体に近いか、高周波} \\ \text{の場合)} \end{array} \quad \alpha \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \beta \cong \omega \sqrt{\varepsilon\mu} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\mu} \right)^2 \right\}$$

06. 電磁波の伝搬

(2) 伝導度が有限の空間での伝搬 (続き)

$(\sigma / \omega \varepsilon)^2 \gg 1$ の時
 (良導体に近いが、
 低周波の場合)

$$\alpha \approx \beta \cong \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

上記と異なり、 ε に依存しないことに注意

位相速度 v は、 $v = \omega / \beta$ より、

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \left[\sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right\}} \right]^{-1}$$

近似では、

$$(\sigma / \omega \varepsilon)^2 \ll 1 \text{ の時} \quad v = \left[\sqrt{\varepsilon \mu} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right\} \right]^{-1}$$

$$(\sigma / \omega \varepsilon)^2 \gg 1 \text{ の時} \quad v = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}$$

06. 電磁波の伝搬

(3) 平面波が運ぶ電磁エネルギー

電磁波のエネルギーの流れ＝ポインティングベクトル \mathbf{S}

\mathbf{S} の定義： $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ なら \mathbf{S} の大きさ U は $|\mathbf{S}| = EH$

ポインティングベクトルの示すもの＝単位面積あたりの電磁波のエネルギーの流れ。単位体積あたりの電磁波のエネルギーを U とすると、

$$U = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2) \quad \text{ここで、} \quad \frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad \text{なので、} \quad \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2$$

つまり、電界のエネルギーと磁界のエネルギーは等分されている。

ポインティングベクトルの大きさを考えると、

$$|\mathbf{S}| = UV = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}}(\epsilon E^2 + \mu H^2) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}H^2$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E^2 = \frac{E^2}{Z}, \quad |\mathbf{S}| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}H^2 = ZH^2 \quad (\because Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}})$$

となるので、電界又は磁界の強さの一方が既知の時、他方を求める問題は、

$$E = \sqrt{ZH}, \quad H = \sqrt{E/Z} \quad \text{と解ける。}$$

06. 電磁波の伝搬

(4) 表皮効果 (導体中の伝搬)

誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、導電率 (抵抗率ではない) σ の導体中を、角周波数 ω の電磁波が伝搬する時、電流が流れる表面から厚さ δ を求める

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

材質が銅の場合、周波数を f [MHz] とすると、 δ [μm] は

$$\delta = \frac{66.18}{\sqrt{f}} \quad [\mu\text{m}]$$

06. 電磁波の伝搬

(5) 平面波の反射・屈折

平面波が媒質の境界面（平面）に入射するときの振る舞いを考える。

媒質 1 及び媒質 2 の物性：

誘電率 ϵ_1 、透磁率 μ_1 、導電率 σ_1

誘電率 ϵ_2 、透磁率 μ_2 、導電率 σ_2

入射波：

電界強度 E_i 、入射角 θ_i

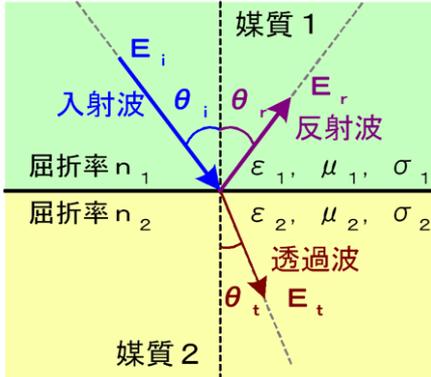
反射波：

電界強度 E_r 、反射角 θ_r

透過波：

電界強度 E_t 、屈折角 θ_t

媒質の境界面で平面電磁波はどうか



- ・電界の接線成分は両側で等しい
- ・電束密度の法線成分は両側で等しい
- ・電界が入射面に水平（垂直偏波）か垂直（水平偏波）かで反射率・透過率が異なる
- ・ $\theta_i = \theta_r$
- ・ $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$
(青字はスネルの法則)

この時の反射率と透過率を求める。まずは、各々の媒質の屈折率 n_1 、 n_2 について、真空の誘電率と屈折率をそれぞれ ϵ_0 、 μ_0 として、

$$n_1 = \frac{V_1}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}, \quad n_2 = \frac{V_2}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}, \quad n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}$$

06. 電磁波の伝搬

(5) 平面波の反射・屈折 (続き)

媒質の導電率 σ_1 , σ_2 がゼロでない有限の値の時、相対屈折率は、

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\mu_2 \{ \varepsilon_2 - j(\sigma_2/\omega) \}}}{\sqrt{\mu_1 \{ \varepsilon_1 - j(\sigma_1/\omega) \}}}$$

ここで、スネルの法則により、入射角 θ_i 、反射角 θ_r 、屈折角 θ_t の間には、

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad \text{が成立つ。}$$

入射波が入射面内にある (垂直偏波) 場合の反射率 R_v と透過率 T_v は、

$$R_v = \frac{\mu_1 n^2 \cos \theta_i - \mu_2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\mu_1 n^2 \cos \theta_i + \mu_2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$T_v = \frac{2\mu_2 n \cos \theta_i}{\mu_1 n^2 \cos \theta_i + \mu_2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

06. 電磁波の伝搬

(5) 平面波の反射・屈折 (続き)

入射波が入射面と垂直な面内にある (水平偏波) 場合の反射率 R_h と透過率 T_h は、

$$R_h = \frac{\mu_2 \cos \theta_i - \mu_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\mu_2 \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$T_h = \frac{2\mu_2 \cos \theta_i}{\mu_2 \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

・ブルースタ角

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ では、 $R_v = 0$ となる入射角 θ_B が存在して、

$$\tan \theta_B = n \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \tan^{-1} n$$

この角をブルースタ角という。

- ・ **反射係数の大きさは、常に 水平偏波 > 垂直偏波**
(だから通常はV・UHF放送には水平偏波を使う)
- ・ 垂直偏波の場合、入射角を大きくして行くと、**反射係数の符号がブルースタ角付近で反転**する。(水平偏波では全ての角で反転)
- ・ $n < 1$ の時は、**反射率の√の中が負になる条件で全反射**が起こる