

# 0 1. 伝送線路 (一般論)

## (1) 電信方程式

伝送線路の単位長あたりの一次定数を

抵抗分...  $R$  [ $\Omega/m$ ]

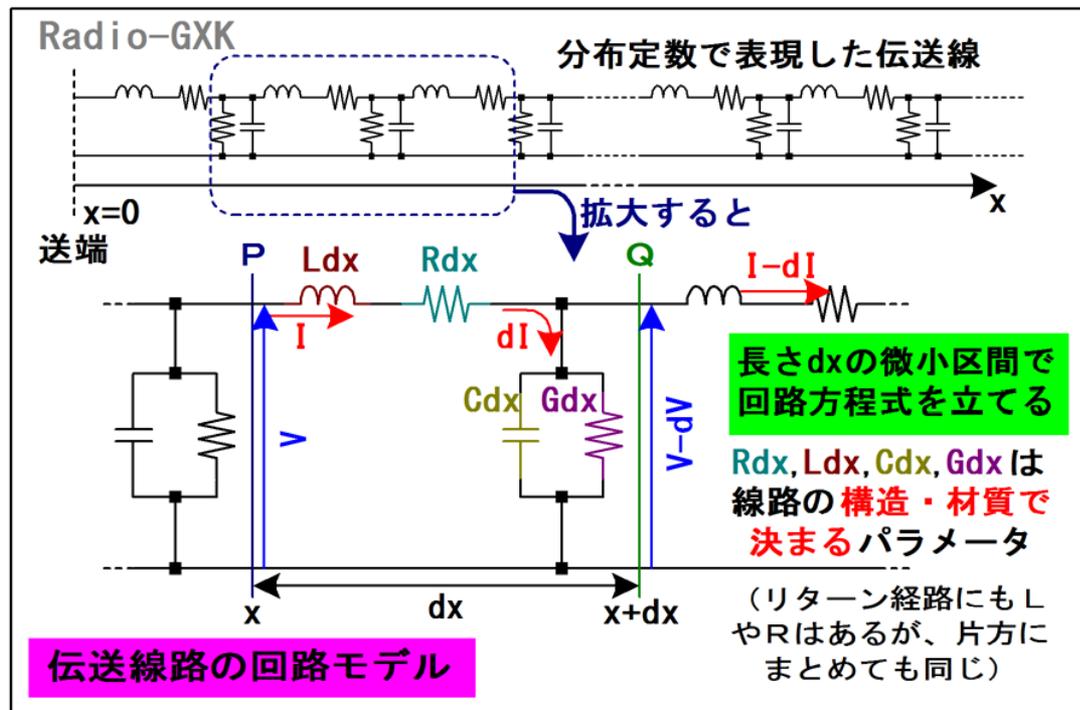
コンダクタンス分...  $G$  [ $\Omega/m$ ]

インダクタンス分...  $L$  [ $H/m$ ]

容量分...  $C$  [ $F/m$ ]

と置いて、位置  $x$ 、時間  $t$  に対する、微小長さ部分  $dx$  についての回路方程式を立てる。

位置  $x$  での電流と電圧を各々  $I$ ,  $V$  とし、位置  $x+dx$  でのそれを  $I+dI$ ,  $V+dV$  とする。



$$\frac{\partial V}{\partial x} = -RI(x,t) - L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -GV(x,t) - C \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

上記を電信方程式と呼び、これを解くのに、以下のパラメータ (二次定数) を導入する

$$\gamma = \sqrt{\{(R + j\omega L)(G + j\omega C)\}} = \alpha + j\beta \quad [m^{-1}]$$

$\gamma$  伝搬定数、 $\alpha$  を減衰定数、 $\beta$  を位相定数と呼ぶ。これらはさらに、

## (2) 定数の計算

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC) \right\}} \quad [\text{nepa/m}]$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC) \right\}} \quad [\text{rad/m}]$$

と書ける。一方。特性インピーダンス  $Z_0$  は、

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = R_0 \pm jX_0, \quad |Z_0| = \sqrt[4]{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 C^2}}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 C^2}} + \frac{RG + \omega^2 LC}{G^2 + \omega^2 C^2} \right\}}$$

$$\pm X_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left| \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 C^2}} - \frac{RG + \omega^2 LC}{G^2 + \omega^2 C^2} \right| \right\}}$$

$$\frac{R}{L} < \frac{G}{C} \quad \text{の時+}$$

$$\frac{R}{L} > \frac{G}{C} \quad \text{の時-}$$

## 0 1. 伝送線路（一般論）

### (3) 無歪み条件と損失の少ない近似

通常の伝送線路では、損失が少ない条件、 $R \ll \omega L$ かつ $G \ll \omega C$ が成り立つので、

$$\gamma \cong j\omega\sqrt{LC} \left\{ 1 - \frac{j}{\omega} \left( \frac{R}{2L} + \frac{G}{2C} \right) + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right\}$$

$$\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \left\{ 1 + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right\}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} - j \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{R}{2\omega L} - \frac{G}{2\omega C} \right), \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad v_p \text{は位相速度}$$

無歪条件は、 $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$  で、このとき、

$$\alpha = \sqrt{RG}, \quad \beta = \omega\sqrt{LC}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

さらに、損失が無視できる、すなわち $R=G=0$ ならば、 $\alpha=0$

## 0 1. 伝送線路（一般論）

### (4) 反射係数

これらを解いて、次を得る。（下記の式は損失のある線路  $R > 0$ ,  $G > 0$  でも成り立つ）

（実は、計算上、ここで原点を負荷端にして波の進行方向を逆にする）

$$V(x) = V_f e^{\gamma x} + V_r e^{-\gamma x}, \quad I(x) = \frac{1}{Z_0} (V_f e^{\gamma x} - V_r e^{-\gamma x})$$

$V_f$  は進行波電圧、 $V_r$  は反射波電圧、 $x$  は負荷端からの距離。電圧の式を変形して、

$$V(x) = V_f e^{\gamma x} \left( 1 + \frac{V_r e^{-\gamma x}}{V_f e^{\gamma x}} \right) = V_f e^{\gamma x} (1 + \Gamma(x))$$

ここで  $\Gamma(x)$  を位置  $x$  で負荷を見込む反射係数（複素数）と定義し、

$$\Gamma(x) \equiv \frac{V_r}{V_f} e^{-2\gamma x}$$

と書ける。特に、負荷端での反射係数  $\Gamma_0$  は、 $\Gamma_0 = \Gamma(x=0) = \frac{V_r}{V_f} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$

と表せる。つまり、 $\Gamma(x) = \Gamma_0 e^{-2\gamma x}$

となる。ここで、 $\Gamma_0$  は  $V_r$  と  $V_f$  の位相差を含むので、複素数であることに注意

## 0 1. 伝送線路（一般論）

## (4) 反射係数（続き）

位置  $x$  における、 $V(x)$  と  $I(x)$  の比  $Z(x)$  を考える。まず、電流を反射係数を用いて書けば、

$$I(x) = \frac{V_f e^{\gamma x}}{Z_0} \left( 1 - \frac{V_r}{V_f} e^{-\gamma x} \right) = \frac{V_f e^{\gamma x}}{Z_0} \{ 1 - \Gamma(x) \}$$

任意の場所（負荷端から距離  $x$ ）で負荷を見たインピーダンスは、

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_0 \exp(-2\gamma x)}{1 - \Gamma_0 \exp(-2\gamma x)}$$

と求められる。別の表現では、

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma x}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma x}$$

# 0 1. 伝送線路（一般論）

## (5) 無損失線路におけるパラメータ

以下、損失が無視できる線路の特性インピーダンスが  $Z_0$ 、つまり  $\gamma = j\beta$  であるとする。  
 また、負荷のインピーダンスは  $Z_L$ 、負荷端からの距離を  $x$  とする。

負荷端での電圧反射係数  $\Gamma_0$  は、
$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

電圧定在波比  $\rho$  は、
$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|}, \quad |\Gamma_0| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$$

$\rho$  は入射電力  $P_f$  と反射電力  $P_r$  によっても表せて、

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{P_r / P_f}}{1 - \sqrt{P_r / P_f}} = \frac{\sqrt{P_f} - \sqrt{P_r}}{\sqrt{P_f} + \sqrt{P_r}}$$

電圧腹でのインピーダンス  $Z_{max}$  は、
$$Z_{max} = \rho Z_0$$

電圧節でのインピーダンス  $Z_{min}$  は、
$$Z_{min} = Z_0 / \rho$$

電圧腹での電圧・電流を  $V_{max}$ 、 $I_{min}$ 、  
 電圧節での電圧・電流を  $V_{min}$ 、 $I_{max}$  と  
 すると、負荷に供給される電力  $P$  は、
$$P = \frac{V_{max} V_{min}}{Z_0} = I_{max} I_{min} Z_0$$

# 0 1. 伝送線路 (一般論)

## (6) スタブ

長さ  $d$  の、特性インピーダンスが  $Z_0$  無損失伝送線路の先に付いた、負荷  $Z_L$  を見込むインピーダンス  $Z$  を考える。

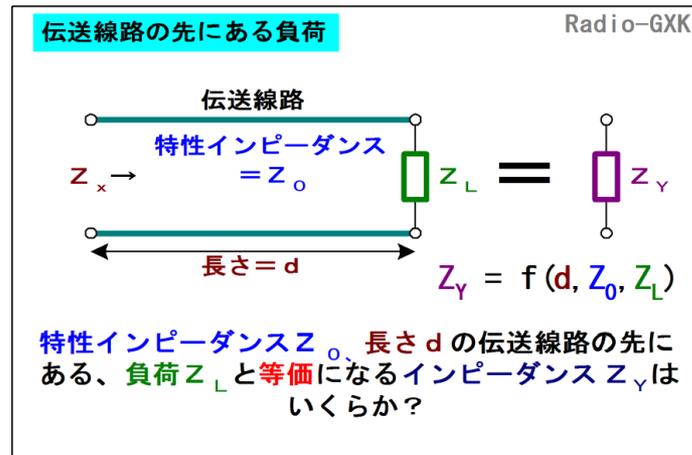
$$Z = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d}$$

特別な場合として、先端を短絡した  $Z_L = 0$  (ショートスタブ) の場合は、

$$Z = jZ_0 \tan \beta d$$

また、先端が開放の場合  $Z_L = \infty$  (オープンスタブ) の場合は、

$$Z = -jZ_0 \cot \beta d$$



# 01. 伝送線路 (一般論)

## (7) 透過電力・反射電力

ある伝送線路で、電圧定在波比が $\rho$ のとき、入力電力 $P_i$ と透過電力 $P_t$ の比 (透過係数)  $T$ を考える。

$$T = \frac{P_t}{P_i} = 1 - |\Gamma|^2 = \frac{4\rho}{(\rho + 1)^2}, \quad T_{dB} = 10 \log \frac{P_t}{P_i} = 10 \log \frac{4\rho}{(\rho + 1)^2}$$

同様に、入力電力 $P_i$ と反射電力 $P_r$ の比 (反射係数)  $R$ を考える。

$$R = 1 - \frac{P_r}{P_i} = |\Gamma|^2 = \left( \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \right)^2, \quad R_{dB} = 20 \log |\Gamma| = 20 \log \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$$

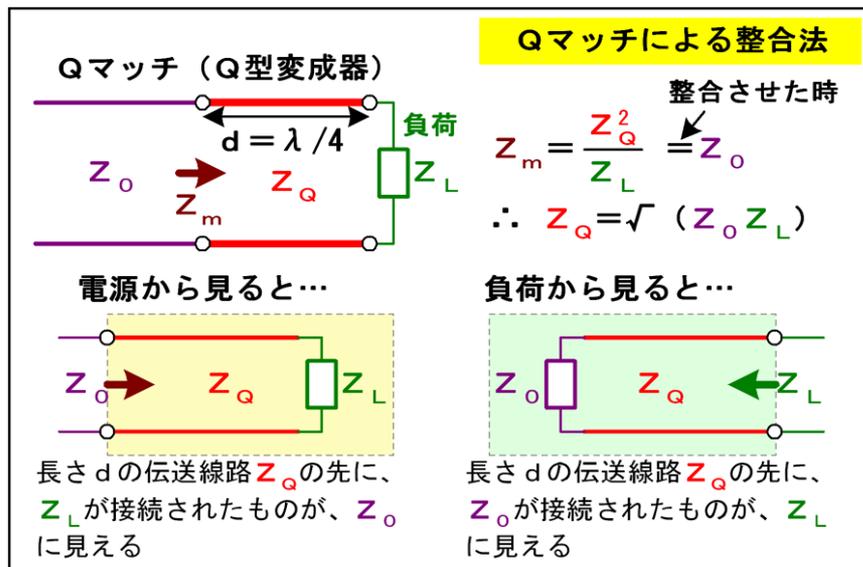
-  $T_{dB}$ を伝送損失、 $-R_{dB}$ をリターンロスという。

## (8) 伝送線路を用いた整合器 (Qマッチ)

特性インピーダンス $Z_0$ の伝送線路を、負荷インピーダンス $Z_L$ に整合させるための $\lambda/4$ 線路に求められるインピーダンス $Z_Q$ は、

$$Z_Q = \sqrt{Z_0 Z_L}$$

で与えられる。



## (9) 伝送線路を共振器として用いる

伝送線路を共振器として用いる時は先端は開放か短絡。線路に損失がある場合の特性どうなるか、を考える。線路の長さを  $d$ 、伝達係数を  $\gamma = \alpha + j\beta$ 、特性インピーダンスを  $Z_0$  として、入力端から終端を見たインピーダンスを  $Z$  とすると、

$$Z = Z_0 \tanh \gamma d = Z_0 \frac{\tanh \alpha d + j \tan \beta d}{1 + j \tanh \alpha d \tan \beta d}$$

共振時は  $\tan \beta d = 0$ 、反共振時は  $\tan \beta d = \infty$  となる。また、損失が少ない線路では、 $\tanh \alpha d \doteq \alpha d$  なので、各々のインピーダンスを  $Z_R$ 、 $Z_A$  とすると、

$$Z_R = Z_0 \tanh \alpha d \cong Z_0 \alpha d, \quad Z_A = Z_0 \frac{1}{\tanh \alpha d} \cong \frac{Z_0}{\alpha d}$$

共振周波数  $\omega_0$  に対してのズレ、 $\Delta\omega$  について、インピーダンスの変化を考える。結果だけ示せば、

$$Z = Z_0 \frac{\alpha d + j\pi \Delta\omega / \omega_0}{1 + j\alpha d \Delta\omega / \omega_0} \cong Z_0 \left( \alpha d + j\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)$$

となる。

## 0 1. 伝送線路（一般論）

(9) 伝送線路を共振器として用いる（続き）

回路のQは、 $Q = \frac{\beta}{2\alpha}$  で表される。

共振時、反共振時、各々のインピーダンスを $Z_R$ 、 $Z_A$ をQを使って表すと、

$$Z_R = Z_0 \alpha d = Z_0 \frac{\beta d}{2Q} = Z_0 \frac{m\pi}{2Q} \quad (m = \pm 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$Z_A = \frac{Z_0}{\alpha d} = Z_0 \frac{2Q}{\beta d} = Z_0 \frac{4Q}{n\pi} \quad (n = \pm 1, 3, 5, \dots)$$

(10) 電磁的に結合している伝送線路

作成中

## (1) 平行2線

線の半径を  $a$ 、線間隔を  $d$ 、線間物質の比誘電率は  $\epsilon_r$ 、比透磁率は 1 とする。(導体自体の比透磁率も 1 とする)

・ 特性インピーダンス  $Z_0$ 

$$Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$$

いつでも成り立つ

$a \ll d$  の時は

$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$$

$$Z_0 \cong \frac{276}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{d}{a}$$

・ 単位長あたりの導体抵抗  $R$  及びコンダクタンス  $G$ 

導体の導電率を  $\sigma$ 、線間物質の誘電正接を  $\tan \delta$  ( $= \epsilon'' / \epsilon'$ )、信号の周波数を  $f$  とすると、

$$R = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\pi\sigma}} \quad [\Omega/\text{m}], \quad G = \frac{2\pi^2 f\epsilon''}{\cosh^{-1} \frac{d}{2a}} \quad [\text{S}/\text{m}]$$

この後で伝搬定数を計算するのに必要になる。

## 02. 伝送線路 (各論)

### (1) 平行2線 (続き)

- ・ 伝搬定数  $\gamma = \alpha + j\beta$  (減衰定数  $\alpha$  と位相定数  $\beta$ )

伝送損失は十分小さいものと仮定する。減衰定数  $\alpha$  は、

$$\alpha = \frac{R}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2}$$

第1項は導体 (抵抗) 損で、

$$\frac{R}{2Z_0} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\pi\sigma}} \frac{\sqrt{\epsilon'}}{240 \cosh^{-1} \frac{d}{2a}}$$

第2項は、誘電体損で、

$$\frac{GZ_0}{2} = \pi f \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\epsilon'} \tan \delta$$

第2項は小さく、通常は無視して構わない。そこで、

$$\alpha \cong \frac{R}{2Z_0} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\pi\sigma}} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{240 \cosh^{-1} \frac{d}{2a}}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon' + j\epsilon'' \cong \epsilon' \\ (\because \epsilon'' < \epsilon') \end{aligned}$$

と近似される。一方、位相定数  $\beta$  [rad/m] は、 $\beta \cong \frac{2\pi\sqrt{\epsilon'}}{\lambda_0}$  で求められる。

## 02. 伝送線路 (各論)

### (1) 平行2線 (続き)

- 放射損失  $P_r/P$

空間に放射されてしまう電力  $P_r$  と伝送電力  $P$  の比は、

$$\frac{P_r}{P} = \frac{160}{Z_0} \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right)^2$$

で求められる。

### (2) 同軸線路

内導体の外半径を  $a$ 、外導体の内半径を  $b$ 、絶縁体の比誘電率は  $\epsilon_r$ 、比透磁率は 1 とする。  
(導体自体の比透磁率も 1 とする)

- 特性インピーダンス  $Z_0$

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \cong \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{b}{a}$$

- 単位長あたりの導体抵抗  $R$  及びコンダクタンス  $G$

導体の導電率を  $\sigma$ 、線間物質の誘電正接を  $\tan \delta$  ( $= \epsilon''/\epsilon'$ )、信号の周波数を  $f$  とすると、

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\pi\sigma}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad [\Omega/\text{m}], \quad G = \frac{4\pi^2 f\epsilon''}{\ln(b/a)} \quad [\text{S}/\text{m}]$$

## 02. 伝送線路 (各論)

### (2) 同軸線路 (続き)

- ・ 伝搬定数  $\gamma = \alpha + j\beta$  (減衰定数  $\alpha$  と位相定数  $\beta$ )

伝送損失は十分小さいものと仮定する。減衰定数  $\alpha$  は、

$$\alpha = \frac{R}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2}$$

第1項は導体 (抵抗) 損で、

$$\frac{R}{2Z_0} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\pi\sigma}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{\sqrt{\epsilon'}}{60 \ln \frac{b}{a}}$$

第2項は、誘電体損で、

$$\frac{GZ_0}{2} = \pi f \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\epsilon'} \tan \delta$$

第2項は小さく、通常は無視して構わない。そこで、

$$\alpha \cong \frac{R}{2Z_0} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\pi\sigma}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{240 \ln \frac{b}{a}} \quad \begin{matrix} \epsilon_r = \epsilon' + j\epsilon'' \cong \epsilon' \\ (\because \epsilon'' \ll \epsilon') \end{matrix}$$

と近似される。一方、位相定数  $\beta$  [rad/m] は、  $\beta \cong \frac{2\pi\sqrt{\epsilon'}}{\lambda_0}$  で求められる。

## (2) 同軸線路 (続き)

・ 使用周波数の上限

原理的に上限はないが、高周波ではTEモード、或いはTMモードが立ち上がるため、これらの存在し得ない周波数までで用いるのが原則。遮断波長が最も長いのがTE<sub>11</sub>モード。TE<sub>mn</sub>モードとTM<sub>mn</sub>モードの遮断周波数は、

$$\text{TE}_{mn}\text{モード} \quad \lambda_c \cong \frac{\pi(a+b)}{m} \quad (n=1), \quad \lambda_c \cong \frac{2(b-a)}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{TM}_{mn}\text{モード} \quad \lambda_c \cong \frac{2(b-a)}{n}$$

$$\text{TE}_{11}\text{モードの遮断波長 } \lambda_{cTE11} \text{ は } \lambda_{cTE11} = \pi(a+b)$$

・ 伝送電力の上限

内導体の表面にできる電界での絶縁破壊と、導体抵抗による温度上昇が伝送電力の上限を決める。ここでは、絶縁破壊によるものを考える。絶縁耐力の電界強度をE<sub>max</sub>とすると、伝送電力の上限P<sub>max</sub>は、

$$P_{\max} = \frac{a^2 E_{\max}^2}{2Z_0} \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2$$

## (3) ストリップライン

・ 特性インピーダンス

導体の厚み  $t$  を無視し、比誘電率  $\epsilon_r$  の絶縁体の厚みが  $b$  で、その中央に幅  $W$  の導体が埋まっている構造を考える。特性インピーダンスは厳密には複雑な式になるが、簡易的に以下の式で与えられる。

$$Z_0 = \frac{1}{4\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{b}{W}$$

・ 減衰定数  $\alpha$ 

抵抗損と誘電体損に分けられる。抵抗損  $\alpha_C$  は、 $b$  に対して  $W$  が十分大きい時は、

$$\alpha_C = \frac{1}{2Z_0W} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi f \mu}}$$

一方、誘電体損  $\alpha_D$  は、

$$\alpha_D = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon'}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sigma$$

## (4) マイクロストリップライン

・ 特性インピーダンス

誘電体 (比誘電率  $\varepsilon_r$ ) は、導体とグランドプレーン間の「下半分」にしかないので、「実効充填率」 $q$ を導入し、実効的な誘電率  $\varepsilon_{eff}$  との間に、

$$\varepsilon_{eff} = 1 + q(\varepsilon_r - 1)$$

なる関係があるものとする。導体の厚さ  $t \rightarrow 0$  の近似で、特性インピーダンス  $Z_0$  は下記のようになる。

$$Z_0 \cong 30 \ln \left[ 1 + \frac{4h}{W} \left\{ \frac{8h}{W} + \sqrt{\left( \frac{8h}{W} \right)^2 + \pi^2} \right\} \right]$$

・ 減衰定数  $\alpha$ 

抵抗損と誘電体損に分けられる。抵抗損  $\alpha_c$  は、ストリップラインの  $\alpha_c$  の式の  $\varepsilon_r$  を  $\varepsilon_{eff}$  に置き換えれば求められる。また、誘電体損  $\alpha_D$  も  $1/\sqrt{\varepsilon_r}$  を  $q/\sqrt{\varepsilon_{eff}}$  に置き換えれば求められる。

## 02. 伝送線路 (各論)

### (5) 矩形導波管

#### ・ 伝送モードと管内電磁界

$TE_{mn}$ モード、 $TM_{mn}$ モードがあり、 $m=0, 1, 2, \dots$ 、 $n=0, 1, 2, \dots$ であるが、 $m=n=0$ は存在しない。 $m$ や $n$ の意味は、

$m$  :  $x$ 方向に存在する定在波の数

$n$  :  $y$ 方向に存在する定在波の数

である。管内電磁界の様子は

【マイクロ波工学(\*) p.159-160】

のようになる。

$TE_{mn}$ モードは電界が

$TM_{mn}$ モードは磁界が

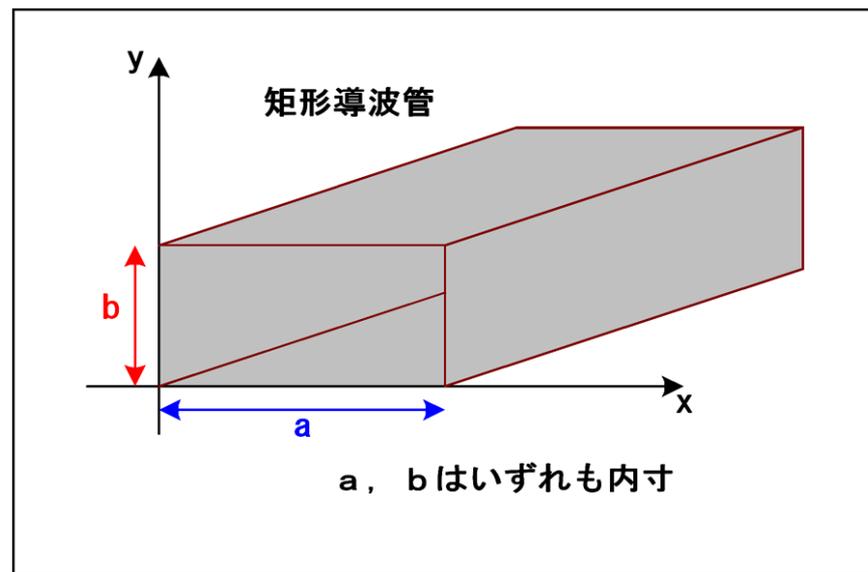
それぞれ進行方向の成分を持たないことを意味する。

#### ・ 遮断周波数 (波長) と管内波長

導波管には、管の寸法と伝送モードで決まる、ある周波数  $f_c$  以下の周波数の電磁波は伝搬できない。この周波数を遮断 (カットオフ) 周波数といい、この周波数の自由空間での波長を遮断波長  $\lambda_c$  という。

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} \quad \text{最も } \lambda_c \text{ が長いのは } TE_{10} \text{ モードで、 } \lambda_c = 2a \text{ である。}$$

この他、モードによる遮断波長は以下のようになる。



## (5) 矩形導波管 (続き)

モード 遮断波長

$$TE_{10} \quad \lambda_c = 2a$$

$$TE_{11} \quad \lambda_c = \frac{2a}{\sqrt{1 + (a/b)^2}}$$

$$TE_{21} \quad \lambda_c = \frac{a}{\sqrt{1 + (a/2b)^2}}$$

モード 遮断波長

$$TM_{11} \quad \lambda_c = \frac{2a}{\sqrt{1 + (a/b)^2}}$$

$$TM_{21} \quad \lambda_c = \frac{a}{\sqrt{1 + (a/2b)^2}}$$

$$TM_{22} \quad \lambda_c = \frac{a}{\sqrt{1 + (a/b)^2}}$$

$TE_{11}$ と $TM_{11}$ や $TE_{21}$ と $TM_{21}$ は異なるモードで同じ遮断波長→縮退しているという。

管内波長 $\lambda_g$ は、以下の式で表される

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$\lambda \rightarrow \lambda_c$ で $\lambda_g \rightarrow \infty$ となり、 $\lambda_c < \lambda_g$ では伝搬できなくなる。正確には伝搬できないのではなく、**エバネッセント的に伝搬** (入口からどんどん減衰) する。また、自由空間波長を $\lambda$ とすると、 $\lambda/\lambda_g = \cos \theta$

## (5) 矩形導波管 (続き)

・ 伝搬定数  $\gamma$ 

自由空間での波長が  $\lambda$  の電磁波の伝搬定数を  $k$  として、  $k^2 = (2\pi/\lambda)^2$

TE<sub>mn</sub>モードの場合、  $k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

と置くと、このモードの伝搬定数  $\gamma$  は、

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$$

$k < k_c$  の時は  $\gamma$  が実数となるので、入射電磁波は距離とともに減衰し、伝搬できない。

・ 特性インピーダンス  $Z_g$ 

自由空間での波長が  $\lambda$ 、特性インピーダンスを  $Z_0$ 、管内波長を  $\lambda_g$  として、導波管内の特性インピーダンスは、

$$Z_g = \frac{\lambda_g}{\lambda} Z_0 \quad \text{基本モード TE}_{10} \text{では、} \lambda_g / \lambda \text{ が } \frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \text{ なので、}$$

0 2. 伝送線路 (各論)

(5) 矩形導波管 (続き)

$$Z_g = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

分母 < 1 だから、必ず  $Z_g > Z_0$  となり、管内のインピーダンスは自由空間中のそれより大きくなる

・ 群速度  $v_g$  と位相速度  $v_p$

TE<sub>10</sub>モードの場合、 $\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$  と置くと、

内部が真空か空気の矩形導波管の群速度  $v_g$  ・ 位相速度  $v_p$  は、

$$v_g = c \cos \theta, \quad v_p = \frac{c}{\cos \theta} \quad (\because v_p v_g = c^2)$$

と表せる。

## (5) 矩形導波管 (続き)

・ 伝送可能な最大電力  $P_{max}$ 

TE<sub>10</sub>モードの場合、 $x = a/2$ において最大電界強度  $E_{y_{max}}$  を取る。この値が管内の絶縁が破壊されずに伝送可能な最大電力  $P_{max}$  を与える。

$$P_{max} = \frac{ab}{4Z_g} |E_{y_{max}}|^2 = \frac{ab}{4Z_0} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_g} |E_{y_{max}}|^2$$

$$|E_{y_{max}}| = \sqrt{\frac{4Z_0 P_{max}}{ab} \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda}}$$

・ 伝送損失  $\alpha$ 

$\sigma$  を管壁導体の導電率、 $\delta$  を表皮深さ、 $Z_0$  を自由空間のインピーダンス、 $\lambda_c$  を遮断波長とすると、TE<sub>mn</sub>モードで  $m$  も  $n$  も 0 でない場合、

$$\alpha = \frac{2}{abZ_0 \cdot \sigma \delta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \left[ \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 (a+b) + (\lambda_c^2 - \lambda^2) \left(\frac{m^2}{4a} + \frac{n^2}{4b}\right) \right]$$

## (5) 矩形導波管 (続き)

TE<sub>mn</sub>モードで $m \neq 0$ 、 $n = 0$ の場合、

$$\alpha = \frac{2}{abZ_0 \cdot \sigma \delta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \left[ \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 (a + 2b) + (\lambda_c^2 - \lambda^2) \frac{m^2}{4a} \right]$$

TM<sub>mn</sub>モードで $m \neq 0$ 、 $n = 0$ の場合、

$$\alpha = \frac{2}{bZ_0 \cdot \sigma \delta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \left[ \frac{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2}{m^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2} \right]$$

## 02. 伝送線路（各論）

### (6) 円形導波管

#### ・ 伝送モードと管内電磁界

管の直径（内径）を  $2a$  とする。TE<sub>mn</sub>モード、TM<sub>mn</sub>モードがあり、 $m=0, 1, 2, \dots$ 、 $n=1, 2, \dots$  である。 $m$ や $n$ の意味は、

$m$  : 電磁界の満たすべき境界条件とその解であるベッセル関数の次数

$n$  :  $m$ 次のベッセル関数の  $n$ 番目の解

である。管内電磁界の様子は【マイクロ波工学(\*) p. 175-176】のようになる。

#### ・ 遮断周波数（波長）と管内波長

円形導波管の遮断波長  $\lambda_c$  は以下のようになる。

モード	遮断波長	モード	遮断波長
TE <sub>01</sub>	$\lambda_c = 1.640a$	TM <sub>01</sub>	$\lambda_c = 2.613a$
TE <sub>11</sub>	$\lambda_c = 3.412a$	TM <sub>21</sub>	$\lambda_c = 1.640a$
TE <sub>21</sub>	$\lambda_c = 2.057a$	TM <sub>21</sub>	$\lambda_c = 1.224a$

TEモードの遮断波長  $\lambda_{c,TE}$  と TMモードの遮断波長  $\lambda_{c,TM}$  の正確な値は、

$\rho_{mn}$  を  $m$  次の第1種ベッセル関数の  $n$  番目の解

$\rho'_{mn}$  を  $m$  次の第1種ベッセル関数の微分関数の  $n$  番目の解

として、以下の式で与えられる。

0 2. 伝送線路 (各論)

(6) 円形導波管 (続き)

$$\lambda_{cTE} = \frac{2\pi a}{\rho'_{mn}}, \quad \lambda_{cTM} = \frac{2\pi a}{\rho_{mn}}$$

遮断波長  $\lambda_c$  と管内波長  $\lambda_g$ 、自由空間中の波長  $\lambda$  も矩形導波管と同じ関係にある。

円形導波管の基本モードは、 $TE_{11}$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

・ 伝送損失  $\alpha$

$TE_{mn}$  モードの場合、

$$\alpha = \frac{1}{aZ_0 \cdot \sigma\delta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \left[ \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 + \frac{m^2}{\rho_{mn}^2 - m^2} \right]$$

## 02. 伝送線路 (各論)

### (6) 円形導波管 (続き)

TM<sub>mn</sub>モードの場合、

$$\alpha = \frac{1}{aZ_0 \cdot \sigma\delta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

TM<sub>mn</sub>モードのなかでも、TM<sub>01</sub>モードは周波数の増加とともに減衰量が減少する。このモードでは、管壁での損失は、z方向の電流によってのみ生ずるが、z方向の電流は周波数に増加とともに減少するため。

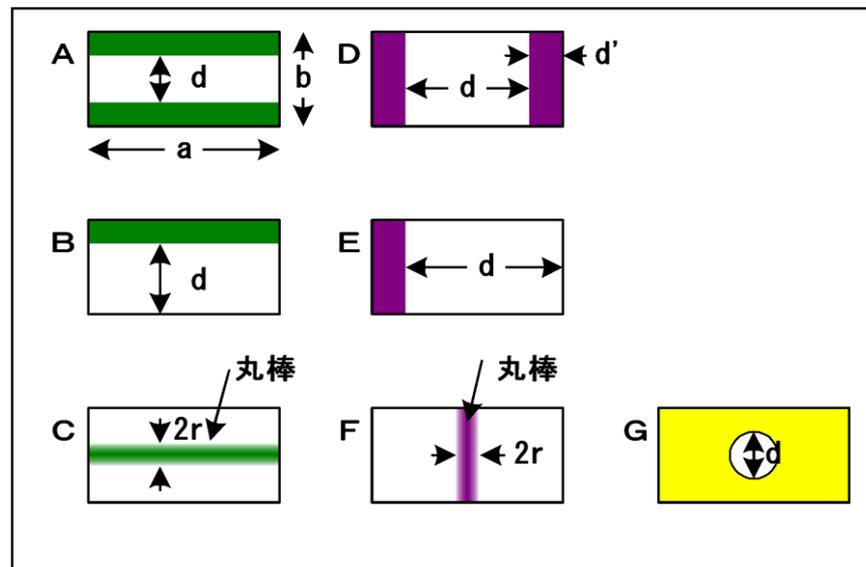
その他の伝搬定数、伝送可能電力、特性インピーダンス等は矩形導波管とほとんど同じ。

### (7) 導波管デバイス

右図のように矩形導波管に付加するデバイスのサセプタンスB

$$A: B = \frac{4b}{\lambda_g} \ln \left[ \operatorname{csc} \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right]$$

$$B: B = \frac{8b}{\lambda_g} \ln \left[ \operatorname{csc} \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right]$$



## (7) 導波管デバイス (続き)

$$\text{C} : B_1 = \frac{2b}{\lambda_g} \left( \frac{\pi r}{b} \right)^2, \quad B_2 \cong \frac{1}{B_1} \qquad \text{G} : B \cong -\frac{3ab\lambda_g}{2\pi d^3} \quad d \prec a, b$$

$$\text{D} : B \cong -\frac{\lambda_g}{a} \cot^2 \left( \frac{\pi d}{2a} \right), \quad \frac{d}{a} \prec 1$$

$$B \cong -\frac{\lambda_g}{a} \tan^2 \left( \frac{\pi d'}{2a} \right), \quad \frac{d'}{a} \prec 1$$

$$\text{E} : B \cong -\frac{\lambda_g}{a} \left[ 1 + \csc^2 \left( \frac{\pi d}{2a} \right) \right] \cot^2 \left( \frac{\pi d}{2a} \right)$$

$$\text{F} : B \cong -\frac{2\lambda_g}{a} \times \frac{1}{\ln \frac{2a}{\pi r} - 2} \quad \frac{2r}{a} \prec 1$$

## (8) 空洞共振器

・ 直方体空洞の共振周波数

$a$ ,  $b$ ,  $c$  を3辺の長さとする直方体空洞に対して、 $m$ ,  $n$ ,  $p$  を整数とする時、共振モードは、 $TE_{mnp}$  モード、 $TM_{mnp}$  モードがあるが縮退しているので、共振周波数 (波長) は同じ。共振波長  $\lambda_{mnp}$  は、

$$\lambda_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2c}\right)^2}}$$

・ 円柱空洞の共振周波数

半径  $r$ , 長さ  $L$  の円柱空洞に対して、 $m$ ,  $n$ ,  $p$  を整数とする時、共振モードは、 $TE_{mnp}$  モード、 $TM_{mnp}$  モードがある。

$TE_{mnp}$  モードの共振波長  $\lambda$  は、 $\rho'_{mn}$  を  $m$  次のベッセル関数の微分 = 0 となる  $n$  個目の解として、

$$\lambda_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho'_{mn}}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{p}{2L}\right)^2}}$$

## (8) 空洞共振器 (続き)

TM<sub>mnp</sub>モード共振波長 $\lambda$ は、 $\rho_{mn}$ をm次のベッセル関数=0となるn個目の解として、

$$\lambda_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_{mn}}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{p}{2L}\right)^2}}$$

(\*) 「マイクロ波工学」 岡田文明 (学献社 1993)

### 03. Sパラメータ

#### (1) Sパラメータの基本

1portで入射電力が $P_f$ 、反射電力が $P_r$ 、系のインピーダンスが $Z_0$ 、ポートのインピーダンスが $Z_i$ とする。この時の $S_{11}$ は反射係数 $\Gamma$ と等しい。

$$S_{11} = \sqrt{\frac{P_r}{P_f}} = \frac{Z_i - Z_0}{Z_i + Z_0} = \Gamma \quad (\text{RL} = -20\log|\Gamma|)$$

#### (2) 回路構成とSパラメータ

直列素子 $Z_s$ のSパラメータ

$$S = \frac{1}{Z_s + 2Z_0} \begin{pmatrix} Z_s & 2Z_0 \\ 2Z_0 & Z_s \end{pmatrix}$$

並列素子 $Z_p$ のSパラメータ

$$S = \frac{1}{2Z_p + Z_0} \begin{pmatrix} -Z_0 & 2Z_p \\ 2Z_p & -Z_0 \end{pmatrix}$$

特性インピーダンス $Z$ の無損失伝送線路のSパラメータ

$$S = \frac{1}{2Z \cdot Z_s + j(Z^2 + Z_0^2)\tan\theta} \times \begin{pmatrix} j(Z^2 - Z_0^2)\tan\theta & 2Z_0(Z + jZ_0 \tan\theta)e^{-j\theta} \\ 2Z_0(Z + jZ_0 \tan\theta)e^{-j\theta} & j(Z^2 - Z_0^2)\tan\theta \end{pmatrix}$$

### 03. Sパラメータ

#### (2) 回路構成とSパラメータ (続き)

特に  $Z = Z_0$  の時は 
$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

ここで  $\theta$  は  $\theta = 2\pi L/\lambda$   
( $L$  : 線路長  $\lambda$  : 波長)

#### (3) ABCD行列とSパラメータ

ここで  $Y_0 = 1/Z_0$

$$S_{11} = \frac{A + BY_0 - CZ_0 - D}{A + BY_0 + CZ_0 + D} \quad S_{12} = \frac{2(AD - BC)}{A + BY_0 + CZ_0 + D}$$

$$S_{21} = \frac{2}{A + BY_0 + CZ_0 + D} \quad S_{22} = \frac{-A + BY_0 - CZ_0 + D}{A + BY_0 + CZ_0 + D}$$

$$A = \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}} \quad B = Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$$

$$C = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}} \quad D = \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$$