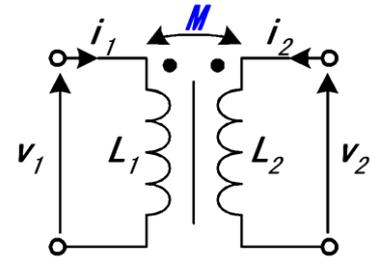


01. コイルとトランス

(1) 2個のコイルと相互インダクタンス

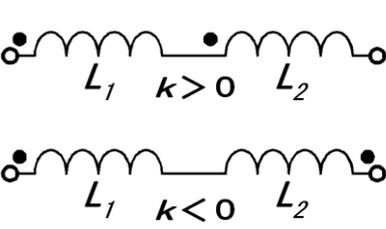


$M = k\sqrt{L_1 L_2}$
 $-1 \leq k \leq 1$

M: 相互インダクタンス
k: 結合係数

合成インダクタンス L_S

$L_S = L_1 + L_2 + 2M$
 $k > 0 \rightarrow M > 0$
 $k < 0 \rightarrow M < 0$



相互インダクタンス : M

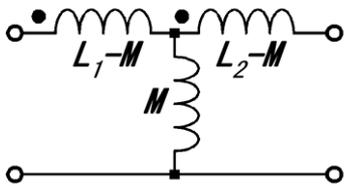
$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

結合係数 : k

kは2つのコイルの●がともに電流の流入もしくは流出側にある時に正、どちらかが逆の時に負。

コイル L_1 と L_2 の合成インダクタンス L_S は

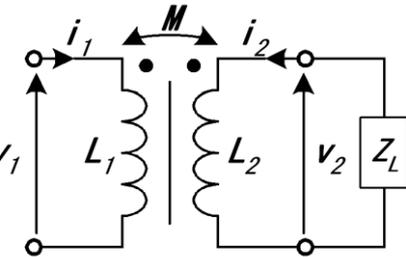
$$L_S = L_1 + L_2 + 2M$$



相互誘導回路の T 形等価回路

負荷のある相互誘導回路

一次側から見たインピーダンス Z_1 は

$$Z_1 = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_L}$$


相互誘導回路の T 形等価回路

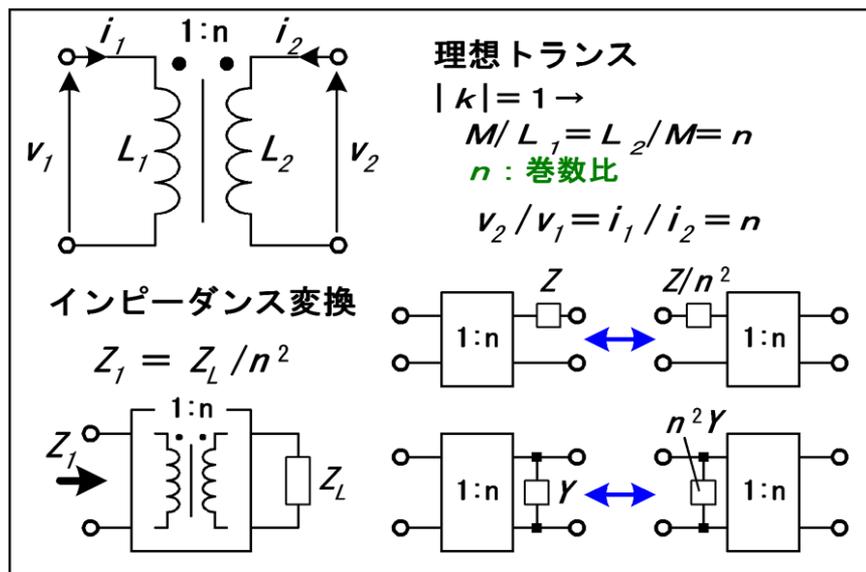
負荷のある相互誘導回路

一次側から見たインピーダンス Z_1

$$Z_1 = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_L}$$

01. コイルとトランス

(2) 理想トランスとインピーダンス変換



理想トランスでは $k=1$ 、つまり、

$$M^2 = L_1 L_2 \quad \therefore \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M} = n$$

ここで、 n は巻数比

一次側、二次側の電圧、電流と、巻数比 n の関係は、

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{i_1}{i_2} = n$$

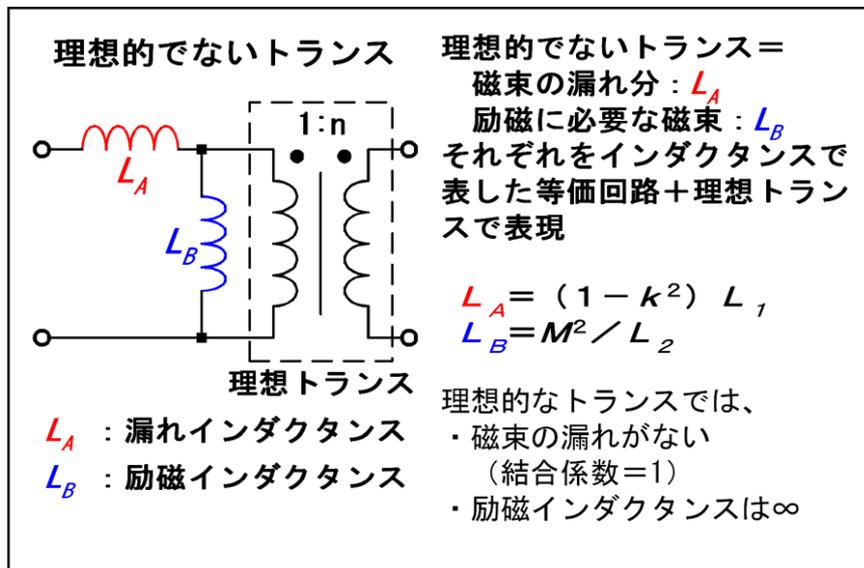
負荷 Z_L を接続した理想トランスを、一次側から見たインピーダンス Z_1 は

$$Z_1 = \frac{Z_L}{n^2}$$

二次側に直列のインピーダンス Z は、一次側に直列に入れた Z/n^2 と等価、
 二次側に並列のアドミッタンス Y は、一次側に並列に入れた $n^2 Y$ と等価。

01. コイルとトランス

(3) 理想的でないトランスのモデル



理想的でない現実のトランスでは、

- ・磁束に漏れがある
 - ・励磁のために電流が必要
- これを回路モデルで表す。

磁束の漏れ分は、直列の「漏れインダクタンス L_A 」で、励磁電流は並列の「励磁インダクタンス L_B 」で、それぞれモデル化する。

$$L_A = (1 - k^2) L_1$$

$$L_B = k^2 L_1 = \frac{M^2}{L_2}$$

$$(L_A + L_B = L_1)$$

モデルは、理想でないファクタを全て一次側に集めたものとしている

02. 回路変換

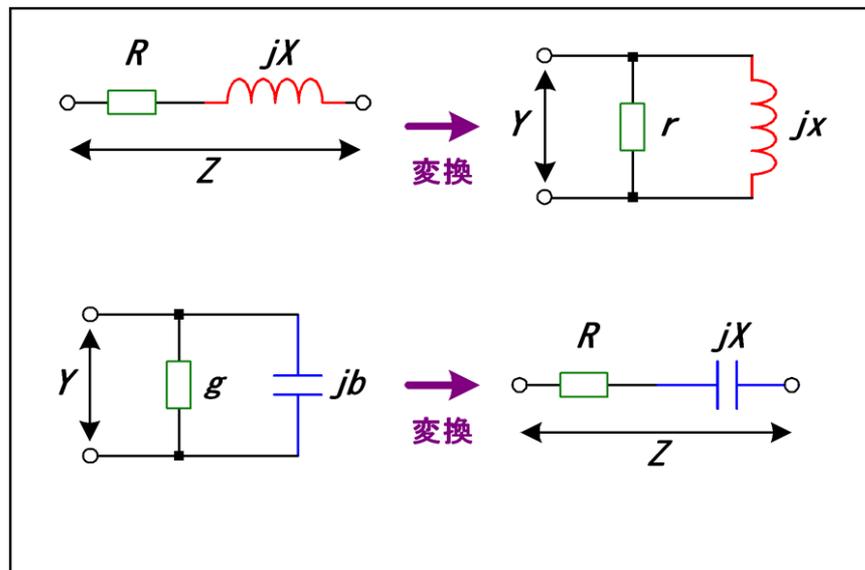
(1) 直列・並列変換

直列の抵抗分 R とリアクタンス分 jX を並列の抵抗分 r とリアクタンス分 jx に変換する。(右図の上半分)

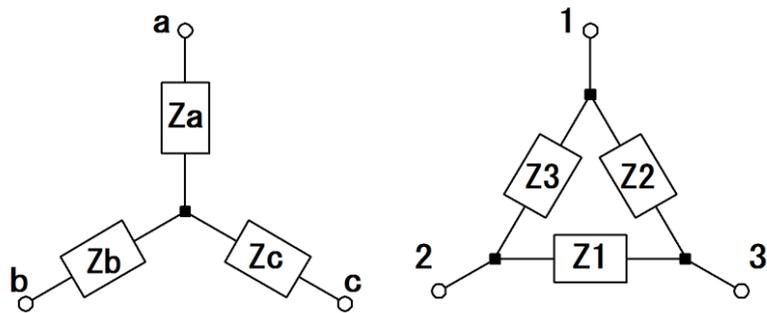
$$r = \frac{R^2 + X^2}{R}, \quad X = -\frac{R^2 + X^2}{X}$$

並列のコンダクタンス分 g とサセプタンス分 jb を直列の抵抗分 R とリアクタンス分 jX に変換する。

$$R = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad X = -\frac{b}{g^2 + b^2}$$



02. 回路変換

 $\Delta - Y \cdot Y - \Delta$ 変換(2) $\Delta \rightarrow Y$ 変換

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$$

特に $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_d$ なら $Z_a = Z_b = Z_c = 3Z$

(3) $Y \rightarrow \Delta$ 変換

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}, \quad Z_2 = \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}, \quad Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

特に $Z_a = Z_b = Z_c = Z_0$ なら $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_0/3$

03. 回路の諸法則

(1) 重ねの理

電圧源や電流源が同時に存在する回路網内部の電圧、電流分布は、これら電圧源や電流源が単独にその位置に存在する場合の分布を重ねたものに等しい。ただし、取り去られる電圧源は短絡除去、電流源は開放除去する。

(2) 可逆定理（相反定理）

電源を含まない回路網の任意の枝 1 に起電力 E_1 を入れた時に、他の枝、枝 2 に I_2 が流れたとする。逆に枝に 2 に起電力 E_2 を入れた時の、枝 1 の電流を I_1 とすれば、

$$\frac{I_2}{E_1} = \frac{I_1}{E_2} \quad \text{が成り立つ。}$$

上のことは、例えば、アンテナ 1 に高周波電流 I_1 を流した時、離れたアンテナ 2 に E_2 の開放起電力が生じたとすると、アンテナ 2 に高周波電流 I_2 を流した時にアンテナ 1 に生じる開放起電力 E_1 が、次式で求められることを意味している。

$$E_1 = \frac{I_2}{I_1} E_2$$

03. 回路の諸定理

(3) 補償定理

電流 I_1 が流れる枝 1 にインピーダンス Z_1 を挿入する。挿入後の各枝の枝電圧、枝電流の変化分は、回路の電源を全て除去した状態で、枝 1 に Z_1 を加えて、さらに直列に、 I_1 と逆向きに $Z_1 I_1$ の起電力を追加した回路の枝電圧、枝電流に等しい。

(4) 鳳・テブナンの定理

内部に電源を含む回路網 N があり、 N から端子 $a b$ が出ているとする。端子 $a b$ を開放した状態の電圧が V_0 で、 N 内の電源を全て除去した時の $a b$ から N を見たインピーダンスが Z_0 であるとする。と、 $a b$ にインピーダンス Z を接続した時に流れる電流 I は、下記で表される。

$$I = \frac{V_0}{Z_0 + Z}$$

これは、起電力が V_0 で、内部インピーダンスが Z_0 の電源に負荷 Z を繋いだ場合と同じであり、回路網 N をこのような電源と見立てることを、**テブナンの等価電圧源** と言う。

(5) ノートンの定理

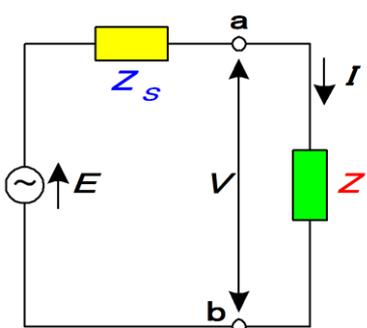
内部に電源を含む回路網 N があり、 N から端子 $a b$ が出ているとする。端子 $a b$ を短絡した時に流れる電流が I_0 で、 N 内の電源を全て除去した時の $a b$ から N を見たアドミタンスが Y_0 であるとする。と、 $a b$ にアドミタンス Y を接続した時の $a b$ 両端の電圧 V は、下記で表される。

03. 回路の諸定理

$$V = \frac{I_0}{Y_0 + Y}$$

(6) 最大電力伝達定理

最大電力伝達定理



右のような回路において、

- ・ R_L が変化する場合
- ・ X_L が変化する場合
- ・ 両方が変化する場合

について、負荷で消費される電力が最大になる条件を求める。

特に両方が可変の場合は、
 $R_S = R_L$, $X_S = -X_L$
 の時に最大電力

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_L}$$

となる。

$Z_S = R_S + X_S$
 $Z_L = R_L + X_L$

左の図のような回路で、負荷の抵抗分、リアクタンス分が可変の時、消費する最大電力 P_{max} とその値を与える負荷側の条件 (R_L , X_L の値) を求める。

- ・ X_L が一定、 R_L が可変の時

$$R_L = \sqrt{R_S^2 + (X_S + X_L)^2}$$

$$P_{max} = \frac{E^2}{2 \left\{ R_S + \sqrt{R_S^2 + (X_S + X_L)^2} \right\}}$$

03. 回路の諸定理

(6) 最大電力伝達定理 (続き)

- ・ R_L が一定、 X_L が可変の時

$$X_L = -X_S, \quad P_{\max} = \frac{RE^2}{(R_L + R_S)^2}$$

- ・ R_L 、 X_L とともに可変の時

$$R_L = R_S, \quad X_L = -X_S, \quad P_{\max} = \frac{E^2}{4R_S}$$

R_L 、 X_L とともに可変の時は Z_S と Z_L が複素共役の関係にある時に電力が最大となる。

04. 回路行列

(1) 縦続行列 (F 行列)

縦続行列 (A B C D 行列)
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



特徴

- (1) 対称回路で $A = D$
- (2) 可逆回路で $AD - BC = 1$
- (3) 無損失回路では A と D が実数、 B と C が虚数

出力開放

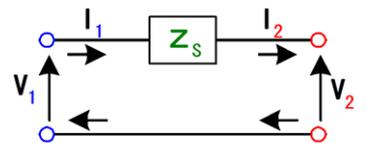


$I_2=0$ で A と C を求める

出力短絡

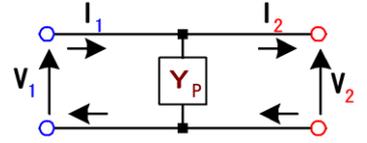


$V_2=0$ で B と D を求める



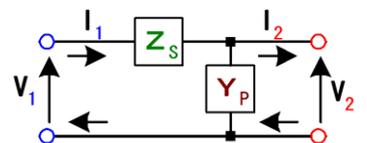
直列回路

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



並列回路

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_p & 1 \end{bmatrix}$$



直並列回路

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_s \\ Y_p & 1 + Z_s Y_p \end{bmatrix}$$

要素の性質

- A : 無次元
 - B : Ω
 - C : S (Ω^{-1})
 - D : 無次元
- ※電流 I_2 の向きに注意

- (1) 対称回路ならば $A = D$
- (2) 可逆回路ならば $AD - BC = 1$
- (3) 無損失回路ならば A と D が実数、 B と C が虚数

直列回路、並列回路の縦続

縦続行列では回路のカスケード接続は、各々の F 行列を順に掛けるだけ。
例えば左図下の回路なら

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{直列回路の F 行列}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_p & 1 \end{pmatrix} \quad \text{並列回路の F 行列}$$

04. 回路行列

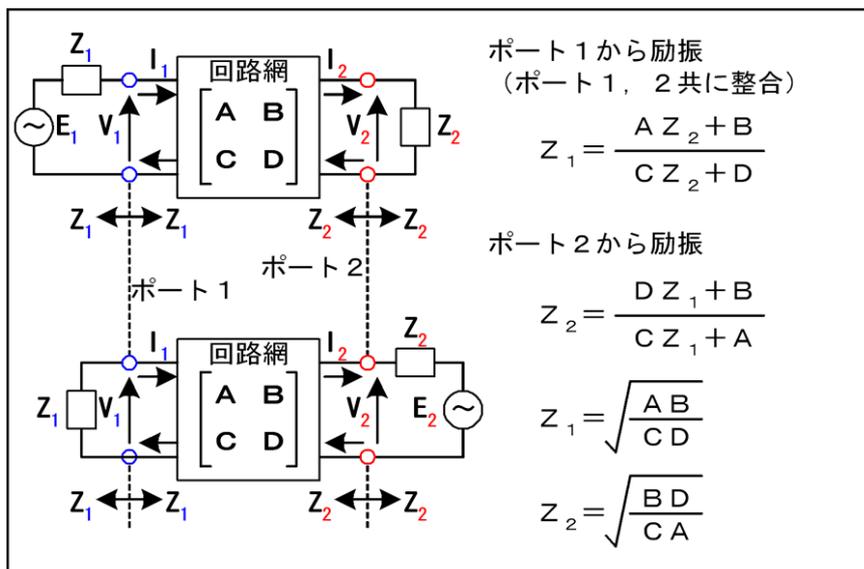
(1) 縦続行列 (続き)

として、図の直並列回路のF行列を求めるには、これらの行列を順に掛ければよい。つまり、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_S \\ Y_P & 1 + Z_S Y_P \end{pmatrix}$$

となる。

(2) 影像インピーダンス



ポート1、ポート2から、各々回路の内側、外側を見た時に同じインピーダンスが接続されている時、

$$Z_1 = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D}, \quad Z_2 = \frac{DZ_1 + B}{CZ_1 + A}$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{BD}{AC}}$$

Z_1, Z_2 を影像インピーダンスという

04. 回路行列

(3) 影像パラメータ

ポート1に電源を接続し、ポート2を解放にした時のインピーダンスを Z_{1f} 、ポート2を短絡した時のインピーダンスを Z_{1s} とすると、

$$Z_{1f} = A/C, \quad Z_{1s} = B/D$$

同様に、ポート2に電源を接続した場合についての開放、短絡インピーダンスを Z_{2f} 、 Z_{2s} とすると、

$$Z_{2f} = D/C, \quad Z_{2s} = B/A$$

影像インピーダンスの式と上式から

$$Z_1 = \sqrt{Z_{1f} Z_{1s}}, \quad Z_2 = \sqrt{Z_{2f} Z_{2s}}$$

また、 $\gamma = \alpha + j\beta = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC})$ なる γ を導入すれば、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \cosh \gamma & \sqrt{Z_1 Z_2} \sinh \gamma \\ \frac{\sinh \gamma}{\sqrt{Z_1 Z_2}} & \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \cosh \gamma \end{pmatrix}$$

04. 回路行列

(3) 影像パラメータ (続き)

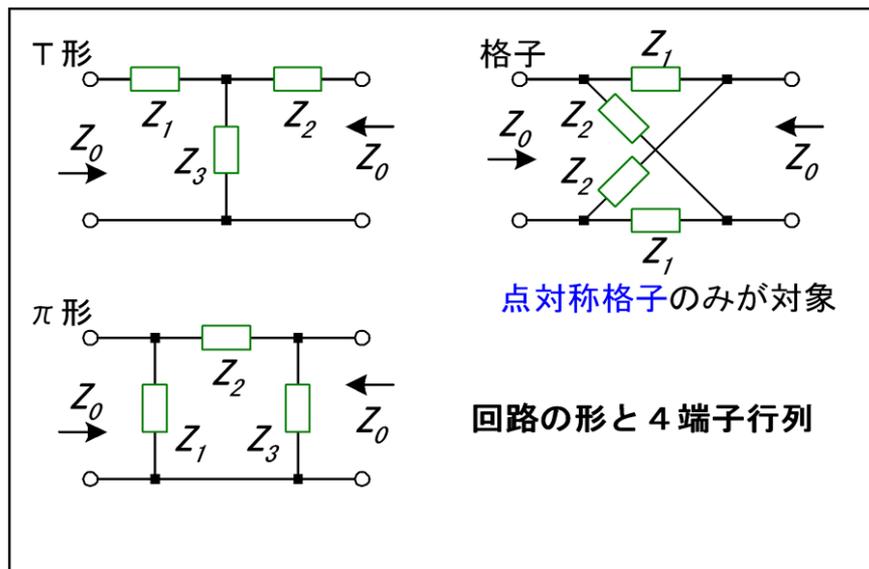
Z_1, Z_2, γ を影像パラメータと呼ぶ。

γ : 伝搬 (伝達) 定数 $\gamma = \alpha + j\beta$

α : 減衰定数

β : 位相定数

(4) 具体的な回路の形と4端子行列



T形回路

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} + Z_1 + Z_2 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}$$

π形回路

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} & 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{bmatrix}$$

0 4 . 回路行列

(4) 具体的な回路の形と 4 端子行列 (続き)

対称格子回路

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} & \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ 2 & \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_3} \end{bmatrix}$$

05. 共振回路

(1) 直列共振回路

回路の抵抗を R 、インダクタンスを L 、容量を C 、電源の周波数を f （角周波数を $\omega = 2\pi f$ ）、共振周波数を f_0 （角周波数を $\omega_0 = 2\pi f_0$ ）とする。

- 回路の誘導性、容量性

回路のインピーダンス Z のリアクタンス分を X とすると、

$X > 0$ の時...誘導性 $X < 0$ の時...容量性 という

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [\text{rad/s}] \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad [\text{Hz}]$$

- 周波数による電源電圧と電流の位相関係

$f < f_0$ の時...回路は容量性で電流は進み

$f > f_0$ の時...回路は誘導性で電流は遅れ

- 共振の鋭さ Q と回路のパラメータ

Q は「共振時、電源電圧 E とインダクタ、キャパシタの両端電圧 V_L , V_C の比」
（共振時は $V_L = V_C$ ）

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$V_L = V_C = QE$$

05. 共振回路

(1) 直列共振回路 (続き)

- 共振の半値幅とQの関係

直列共振で、流れる電流が共振時の $1/\sqrt{2}$ (電力で半分) となる周波数を求める。
この時のインピーダンス $Z = \sqrt{2}R$ となればよいので、

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R$$

この方程式の ω の解を ω_1, ω_2 ($\omega_2 < \omega_1$) とすると、

$$\omega_1 = \omega_0 \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q} \right)^2} \right], \quad \omega_2 = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q} \right)^2} \right]$$

半値幅角周波数と ω 、Qとの関係は、

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\Rightarrow$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2}$$

05. 共振回路

(2) 並列共振回路

- ・ LCともに損失のない共振回路
回路の合成アドミタンス Y は

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$Y = |\dot{Y}| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

共振周波数 ω_0 は $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\left(f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right)$ で直列共振と同じ。

回路の Q は、

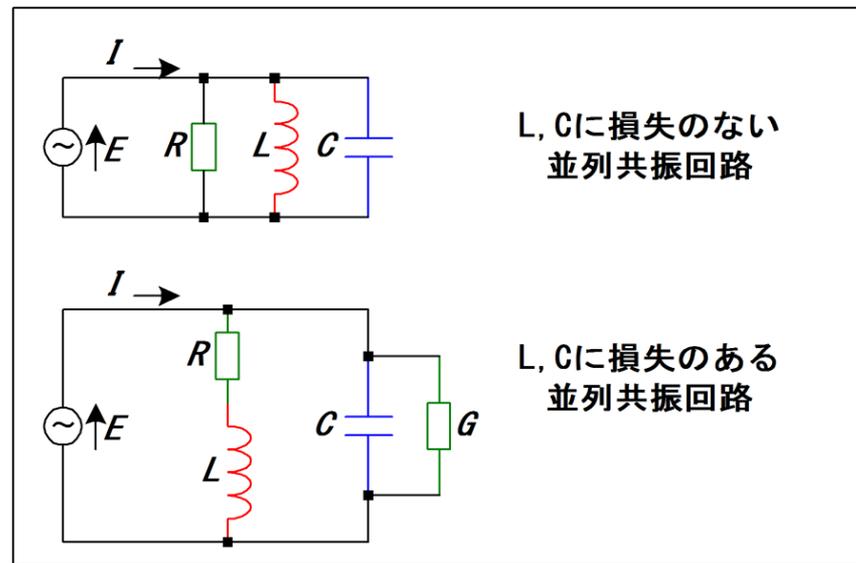
$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} (= \omega_0 CR)$$

電源電圧 E に対する電流 I の遅れ ϕ は

$$\phi = \tan^{-1} R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$\omega < \omega_0$ で、回路は誘導性
 $\omega = \omega_0$ で、回路は純抵抗
 $\omega > \omega_0$ で、回路は容量性

直列共振と逆



05. 共振回路

(2) 並列共振回路 (続き)

- ・ Lに損失のある共振回路
回路のアドミッタンスYは

$$\dot{Y} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

Rが十分小さい時の共振角周波数 ω_0 は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} \quad \left(f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} \right)$$

回路のQは、

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

共振時の電源電流Iは

$$\dot{I} = \frac{CR}{L} \dot{E}$$

05. 共振回路

(2) 並列共振回路 (続き)

共振時にC, Lに流れるの電流を各々 I_C , I_L とすれば、

$$\dot{I}_C = j\omega_0 C \dot{E} = jQ \dot{I}$$

$$\dot{I}_L = \frac{L}{CR} \frac{\dot{I}}{R + j\omega_0 L} \quad \left(\dot{I}_L = -jQ \dot{I} \quad \because R \ll \omega_0 L \right)$$

・ LCともに損失のある共振回路

Lには直列のR, Cには並列のG (コンダクタンス) がぶら下がっている、と考える。

共振周波数を ω_0 とすると、L, Cの Q , Q_L , Q_C は、下記で表される。

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R}, \quad Q_C = \frac{\omega_0 C}{G}$$

コンデンサの損失が無視できる場合、つまり $G \rightarrow 0$ では $Q_C \rightarrow \infty$ で回路全体の Q は Q_L に等しい。

Cを直列の抵抗分 R_C とリアクタンス分 X_C で表せ (並列→直列変換) ば、

$$R_C = \frac{1}{G_C} \cdot \frac{1}{1 + Q_C^2}, \quad X_C = \frac{1}{G_C} \cdot \frac{Q_C}{1 + Q_C^2}$$

回路全体の Q は、

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \quad \left(Q = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C} \right)$$

06. フィルタ回路

(1) 抵抗整合器

得たい減衰率を k ($k > 1$) とする。入出力のインピーダンスを Z_0 とする。右図で、**T形接続**の $R_1 \sim R_3$ 各抵抗値は、

$$R_1 = R_2 = Z_0 \frac{k-1}{k+1}$$

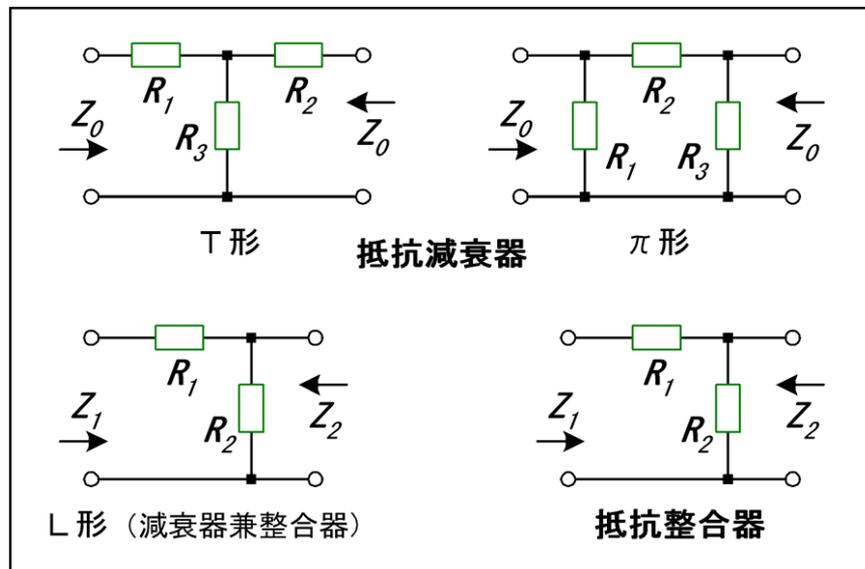
$$R_3 = Z_0 \frac{2k}{k^2-1}$$

π形接続では、 $R_1 = R_3 = Z_0 \frac{k+1}{k-1}$, $R_2 = Z_0 \frac{k^2-1}{2k}$

減衰器と整合器を兼用できる **L形**では、 $Z_1 > Z_2$ であることと、

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{4} \left(k + \frac{1}{k} \right)^2 \quad \text{であることが必要。また、} Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2} \text{ とすると、}$$

$$R_1 = Z_0 \frac{k^2-1}{2k}, \quad R_2 = Z_0 \frac{2k}{k^2-1} \quad \text{と求められる。}$$



06. フィルタ回路

(2) 抵抗減衰器

L型の抵抗整合器は、損失を最小限にする。 $Z_1 > Z_2$ として、この時の抵抗値の求め方は、

$$R_1 = \sqrt{Z_1(Z_1 - Z_2)}, \quad R_2 = \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{Z_1(Z_1 - Z_2)}}$$

この回路の減衰比 k と減衰量 α [dB] は、

$$k = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} - 1}, \quad \alpha = 20 \log k$$

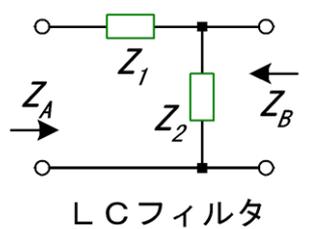
(3) LCフィルタ

フィルタ回路の入出力比 V_{out}/V_{in} は、F行列の要素Aを用いて、

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{A}$$

一般に、フィルタの動作伝送関数Sは、

$$S = \frac{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}{2}$$



LCフィルタ

縦続行列Fは、
 $Z_A = Z_B = Z_0$ として

$$F = \begin{bmatrix} 1 - Z_1 Z_2 & j Z_1 \\ j Z_2 & 1 \end{bmatrix}$$

カットオフ周波数 ω_0 公称インピーダンス Z_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

減衰量 $L(\omega) = 10 \log \{1 + (\omega/\omega_0)^4\}$ [dB]
 傾度 = 40 [dB/dec]

07. 過渡現象

(1) RL直列回路

RL直列回路に $t=0$ で直流電圧を加えた場合の微分方程式は、

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

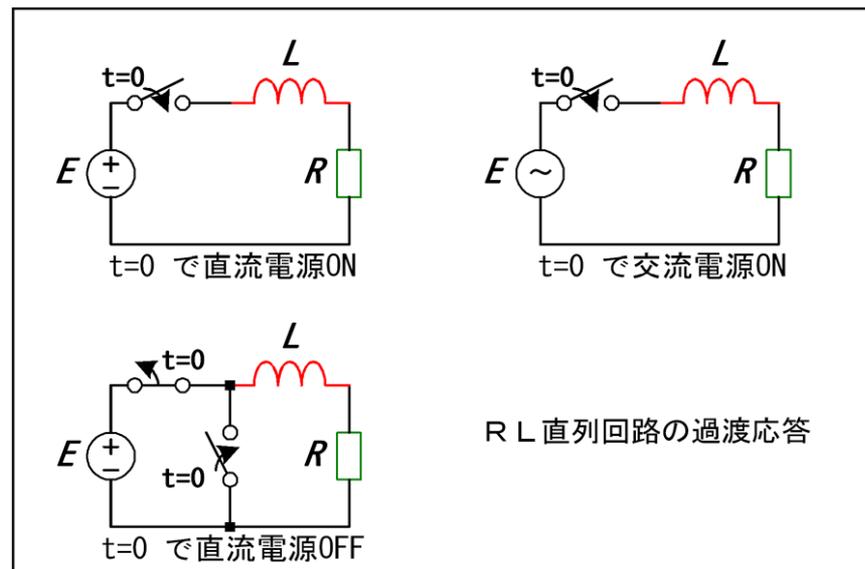
この解は、

$$i = \frac{E}{R} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right\}$$

抵抗で消費される電力 P_R 及びコイルに蓄積される電力 P_L は、

$$P_R = RI^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right\}^2$$

$$P_L = RI^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right\} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$



07. 過渡現象

(1) RL直列回路 (続き)

t=0からt=Tまでの全エネルギー W_R 及び W_L は、

$$W_R = RI^2T - LI^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}T\right) \right\} - \frac{1}{2}LI^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}T\right) \right\}^2$$

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}T\right) \right\}^2$$

RL直列回路からt=0で直流電圧を除いた場合の微分方程式は、

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

この解は、

$$i = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right), \quad v_L = -E \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

07. 過渡現象

(1) RL直列回路 (続き)

抵抗で消費される電力 P_R 及びコイルに蓄積される電力 P_L は、

$$P_R = RI^2 \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right), \quad P_L = -RI^2 \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right)$$

$t=0$ から $t=T$ までの全エネルギー W_R 及び W_L は、

$$W_R = \frac{1}{2} LI^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2R}{L}T\right) \right\}$$

$$W_L = -W_L = -\frac{1}{2} LI^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}T\right) \right\}$$

RL直列回路に $t=0$ で交流電圧 $e(t)$ を加えた場合、 $e(t)$ を

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

と表せば、この系の電圧を表す微分方程式は、

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

07. 過渡現象

(1) RL直列回路 (続き)

この解は、

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta - \varphi) - I_m \sin(\theta - \varphi) \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

ここで、

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

$\theta = \psi$ の場合は $i(t)$ の第2項、すなわち過渡項=0で、 $t=0$ からいきなり定常項のみになる。 $\theta = \psi + \pi/2$ の場合は、過渡項が最大になる。

07. 過渡現象

(2) RC直列回路

RC直列回路に $t=0$ で直流電圧を加えた場合の微分方程式は、コンデンサ両端、抵抗両端の電圧をそれぞれ v_C 、 v_R として、

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = E$$

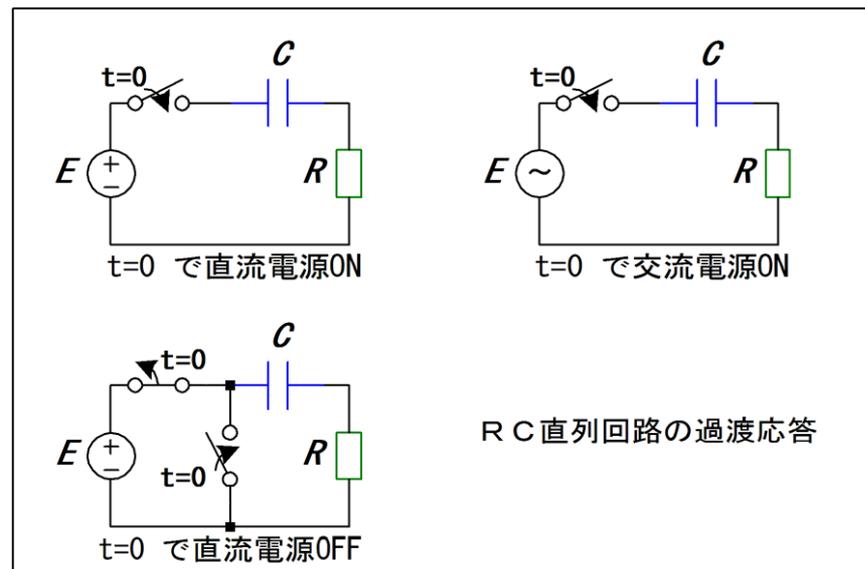
この解は、

$$v_C = E \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right\}$$

$$v_R = E - v_C = E \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$i = I \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad \left(\because I = \frac{V_R}{R} \right)$$

$t=0$ から T までに、抵抗で消費されるエネルギー W_R 及びコンデンサに蓄積されているエネルギー W_C は、



07. 過渡現象

(2) RC直列回路 (続き)

$$W_R = \frac{CE^2}{2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) \right\}, \quad W_C = \frac{CE^2}{2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{T}{RC}\right) \right\}^2$$

$t \rightarrow \infty$ においては、 $W_R = W_C$ となり、**コンデンサに蓄えられたエネルギーと同量のエネルギーが、抵抗で熱になる。**

RC直列回路から $t=0$ で直流電圧を除いた場合の微分方程式は、

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

この解は、

$$v_C = E \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad i = C \frac{dv_C}{dt} = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$t = 0$ から T までに、抵抗で消費されるエネルギー W_R 及びコンデンサに蓄積されているエネルギー W_C は、

07. 過渡現象

(2) RC直列回路 (続き)

$$W_R = \frac{CE^2}{2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) \right\}, \quad W_C = -\frac{CE^2}{2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2T}{RC}\right) \right\}$$

常に $W_R = -W_C$ となり、コンデンサが失ったエネルギーと同量のエネルギーが、抵抗で熱になる。

RC直列回路に $t=0$ で交流電圧 $e(t)$ を加えた場合、 $e(t)$ を

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

と表せば、コンデンサの電荷 q を表す微分方程式は、

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

この解は、

$$q(t) = \frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \theta + \varphi) + \frac{I_m}{\omega} \cos(\theta + \varphi) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

07. 過渡現象

(2) RC直列回路 (続き)

ここで、

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR}$$

電流 i は q を t で微分したものだから、

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = I_m \sin(\omega t + \theta + \varphi) - \frac{I_m}{\omega CR} \cos(\theta + \varphi) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$\theta + \psi = \pi/2 + n\pi$ の場合は $i(t)$ の第2項、すなわち過渡項=0で、 $t=0$ からいきなり定常項のみになる。 $\theta + \psi = \pm n\pi$ の場合は、過渡項が最大になる。

07. 過渡現象

(3) RLC直列回路

回路を流れる電流を i 、コンデンサ両端の電圧を v_C とすれば、

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_C = E$$

ここで、コンデンサの電荷を q とすれば、

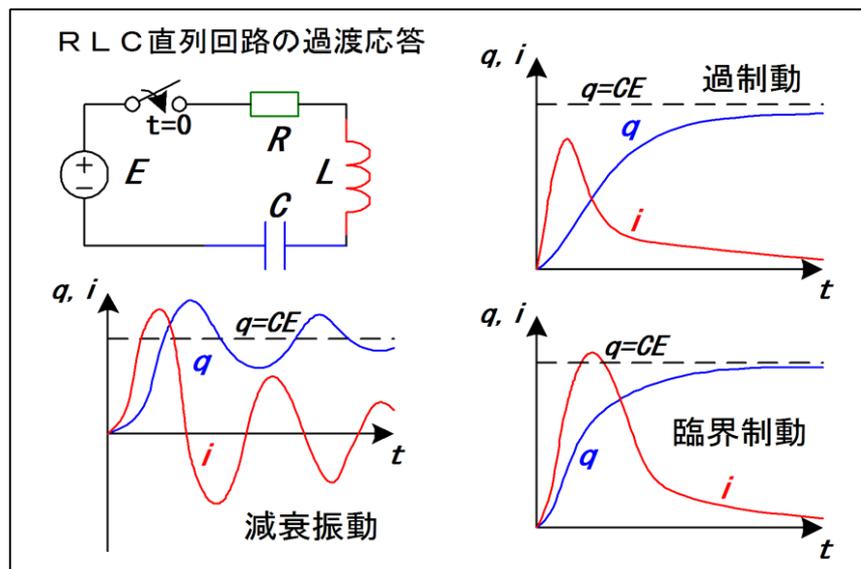
$$v_C = \frac{q}{C}, \quad i = \frac{dq}{dt}$$

だから、上の微分方程式は、

$$LC \frac{d^2q}{dt^2} + RC \frac{dq}{dt} + q = CE$$

と書き直せる。この方程式の解は、

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0 \quad \text{の2つの解を}$$



$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

07. 過渡現象

(3) RLC直列回路 (続き)

として $\sqrt{\quad}$ の中の符号により3つに場合分けする。

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \quad \text{の時 (}\sqrt{\quad}\text{の中が正)} \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{L}{C} - 1}} \exp(-\alpha t) \sinh \gamma t$$

この場合を、過制動といい、電流は振動しない。

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{の時 (}\sqrt{\quad}\text{の中が0)} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

$$i(t) = \frac{E}{L} t \exp(-\alpha t)$$

この場合を、臨界制動といい、電流は振動しない。

(3) RLC直列回路 (続き)

また、時刻 $\tau = \alpha^{-1} = \frac{2L}{R}$ において、極大値 $i_m = \frac{2E}{R} \cdot \frac{1}{e}$ を取る。

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \quad \text{の時 (}\sqrt{\text{の中が負)} \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{R}{2}\right)^2}} \exp(-\alpha t) \sin \beta t$$

この場合を、減衰振動といい、電流は振動しながら減衰する。また、振動の角周波数 β を固有 (角) 振動数といい、必ず LC の共振周波数より小さい。

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad f = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

08. ノイズ

(1) 熱雑音

絶対温度 T [K] の抵抗 R [Ω] の両端には、抵抗内の自由電子の熱運動に起因する熱雑音が発生する。電圧源モデルで考えるノイズ電圧 V_n の値は、ボルツマン定数を k 、着目する周波数帯域幅を B [Hz] として、

$$V_n = 2\sqrt{kTBR} \quad T=260 \text{ [K]}, B=1 \text{ [kHz]}, R=1 \text{ [k}\Omega\text{]} \text{ では、} V_n \doteq 0.12 \text{ [}\mu\text{V]}$$

この抵抗で発生する雑音電力 P_n は、

$$P_n = V_n^2 / R = 4kTB \quad \leftarrow R \text{ の値に依存しない。温度とバンド幅のみで決まる}$$

電流源モデルで考え、雑音電流 I_n は、

$$I_n = 2\sqrt{\frac{kTB}{R}} \quad \text{電圧源モデルの時と同様に、} P_n = I_n^2 R = 4kTB$$

いずれのモデルでも、取出し得る最大電力 P_{max} は、 $P_{max} = \frac{P_n}{4} = kTB$

(2) 等価雑音帯域幅

ノイズをフィルタリングする際、同じカットオフ周波数でもフィルタの次数によって、実効的な帯域幅が異なるため、「バツサリ」フィルタの帯域に直した幅を言う。

08. ノイズ

(2) 等価雑音帯域幅 (続き)

次数	B/f ₀	dB/oct
1	1. 5 7	6
2	1. 2 2	1 2
3	1. 1 5	1 8
4	1. 1 3	2 4
5	1. 1 1	3 0

(3) その他の雑音の種類と性質

・ ショットノイズ

ノイズ電流値 I_s は、電気素量を q 、着目する帯域幅を B 、電流のDC分を I_{DC} として、

$$I_s = \sqrt{2qBI_{DC}}$$

で表せる。PN接合のポテンシャル障壁を超える時の不連続電流による。白色雑音

・ 接触雑音

金属接触面で発生する。1/f特性を持つ

・ ポップコーン雑音

半導体の接合面で発生する。半導体の格子欠陥、不純物が原因で発生する。1/fⁿ特性を持つ (n ≒ 2)

08. ノイズ

(4) 雑音指数

・ 雑音指数とは

増幅器入力の信号電力 S_I と入力雑音 N_I の比が、出力端で信号電力が S_O 、雑音電力が N_O になったとすると、雑音指数 F は次の式で定義される。

$$F = \frac{S_I/N_I}{S_O/N_O}, \quad F_{dB} = 10 \left(\log \frac{S_I}{N_I} - \log \frac{S_O}{N_O} \right)$$

つまり、**増幅器を通った後、入力のS/Nがどれだけ悪化したか**、を示す指標

・ 多段増幅系のNF

増幅器が多段で構成されている場合、1段目の増幅器の利得が G_1 、NFが F_1 、2段目の増幅器の利得が G_2 、NFが F_2 、3段目の増幅器の利得が G_3 、NFが F_3 とすると、2段構成、3段構成の増幅器の総合のNFは、以下のようになる。

$$F_{2\text{stage}} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}$$

$$F_{3\text{stage}} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2}$$

つまり、**1段目の利得 G_1 が大きければ、そのNFで全体のNFがほぼ決まってしまう**。
1段目にNFが小さく、利得が大きい増幅器を持ってくれば、全体が低ノイズにできる。

08. ノイズ

(5) 等価雑音温度

・ 等価雑音温度 T_{eff} とは

増幅回路・アンテナ等から出る雑音を、同じ雑音電力の抵抗体の温度に換算したもの。
例えば、利得 G 、帯域幅 B の増幅回路内部で発生した雑音電力 P_i は、出力で、

$$P_i = GkT_{eff}B \quad \leftarrow R \text{ や } Z \text{ が ない} = \text{インピーダンス、抵抗値等の値に無関係}$$

と表せる。

・ 等価雑音温度と NF

基準温度 T_0 を通常は 290K として、NF の値 F と等価雑音温度 T_{eff} の関係は以下の
ように表せる。

$$T_{eff} = (F - 1)T_0$$

NF [dB]	T_{eff} [K]
0. 1	6. 75
0. 3	20. 7
0. 6	43. 0
1. 0	75. 1
3. 0	289
6. 0	865
10. 0	2610