1．三角関数

(1) 基本関係

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta, \qquad 1+\cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\,\theta$$

(2) 還元公式

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta, \quad \sin(\pi-\theta) = \sin\theta, \quad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta, \quad \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta, \quad \tan(\pi+\theta) = \tan\theta$$

$$\cos(\theta-\frac{\pi}{2}) = \sin\theta, \quad \sin(\theta-\frac{\pi}{2}) = \cos\theta, \quad \tan(\theta-\frac{\pi}{2}) = \cot\theta$$

$$\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta, \quad \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta, \quad \tan(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\cot\theta$$

1．三角関数

(3) 加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

(4) 倍角公式

加法定理でα＝βと置く

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$

$$\therefore \ \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

1．三角関数

(5) 積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

(6) 和積公式

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

1． 三角関数

(7) 合成

$$v_1 = V_1 \sin(\omega t + \phi_1), \quad v_2 = V_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$v_1 \pm v_2 = V \sin(\omega t + \phi)$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 \pm 2V_1 V_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{V_1 \sin\phi_1 \pm V_2 \sin\phi_2}{V_1 \cos\phi_1 \pm V_2 \cos\phi_2}$$

(8) べき乗

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1), \quad \cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta),$$

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3),$$

$$\cos^5\theta = \frac{1}{16}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$$

$$\cos^6\theta = \frac{1}{32}(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10)$$

1．三角関数

(8) べき乗（続き）

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(-\cos 2\theta + 1), \quad \sin^3\theta = \frac{1}{4}(-\sin 3\theta + 3\sin\theta),$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3),$$

$$\sin^5\theta = \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta)$$

$$\sin^6\theta = \frac{1}{32}(-\cos 6\theta + 6\cos 4\theta - 15\cos 2\theta + 10)$$

２．関数一般

(1) 対数関数

$$\log_a XY = \log_a X + \log_a Y, \qquad \log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$$

$$\log_a X^p = p \log_a X$$

$$\log_a X = \frac{\log_b X}{\log_b a}$$ …底の変換公式

(2) 双曲線関数

x ：実数・複素数

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

(2) 双曲線関数（続き）

x ：実数

$$\cosh jx = \cos x, \quad \sinh jx = j \sin x$$

$$\cos jx = \cosh x, \quad \sin jx = j \sinh x$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

３．行列演算

(1) 積の演算

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C)=AB+AC,\quad (A+B)C=AC+BC$$

(2) 転置行列

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

転置行列の積は、下記が成り立つ

$$(AB)'=B'A'$$

$A'=A$　が成り立つ行列 A を「<u>対称行列</u>」という

$A'=-A$　が成り立つ行列 A を「<u>交代行列</u>」という

３．行列演算

(3) 逆行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列はどちらから掛けても同じ結果

$$AX=XA=E \quad \Leftrightarrow \quad X=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\because\ D=ad-bc\ \ (\neq 0)$$

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

ケイリー・ハミルトンの定理

(4) 固有値・固有ベクトル

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるような x=y=0 でないベクトルがあるとき、λ を A の固有値、(x, y) を固有ベクトルという

固有値λの求め方：２次方程式 $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ の解

4．微分

(1) 関数の微分

$$\left(x^{p}\right)' = px^{p-1}$$

$$(\sin ax)' = a\cos ax \qquad (\sec ax)' = a\sec ax\tan ax$$

$$(\cos ax)' = -a\sin ax \qquad (\operatorname{cosec} ax)' = -a\operatorname{cosec} ax\cot ax$$

$$(\tan ax)' = a\sec^2 ax \qquad (\cot ax)' = -a\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\left\{\exp(ax)\right\}' = a\exp(ax), \quad (a^x)' = a^x\ln a \quad (a>0)$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

$$(\sinh ax)' = a\cosh ax \qquad (\operatorname{sech} ax)' = -a\operatorname{sech} ax\tanh ax$$

$$(\cosh ax)' = a\sinh ax \qquad (\operatorname{cosech} ax)' = -a\operatorname{cosech} ax\coth ax$$

$$(\tan ax)' = a\operatorname{sech}^2 ax \qquad (\coth ax)' = -a\operatorname{cosech}^2 ax$$

４．微分

(2) 組合せ関数の微分

$$\{\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\}' = \mathrm{f}(x)\mathrm{g}'(x) + \mathrm{f}'(x)\mathrm{g}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\mathrm{f}(x)\}^p = p\{\mathrm{f}(x)\}^{p-1}\mathrm{f}'(x)$$

$$\left\{\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)}\right\}' = \frac{\mathrm{f}'(x)\mathrm{g}(x) - \mathrm{f}(x)\mathrm{g}'(x)}{\{\mathrm{g}(x)\}^2}, \quad \left\{\frac{1}{\mathrm{f}(x)}\right\}' = -\frac{\mathrm{f}'(x)}{\{\mathrm{f}(x)\}^2}$$

(3) 合成関数の微分

$$y = \mathrm{f}(u), \quad u = \mathrm{g}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}'(u)\mathrm{g}'(x)$$

$$y = \mathrm{f}(u), \quad u = \mathrm{g}(v), \quad v = \mathrm{h}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}'(u)\mathrm{g}'(v)\mathrm{h}'(x)$$

４．微分

(4) 媒介変数関数の微分

$$y = \mathrm{f}(t), \quad x = \mathrm{g}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}}{\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}} = \frac{\mathrm{f}'(t)}{\mathrm{g}'(t)}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} \neq 0\right)$$

(5) 逆関数の微分

$$x = \mathrm{f}(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}} = \frac{1}{\mathrm{f}'(y)}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} \neq 0\right)$$

５．積分

(1) 関数の不定積分

$$\int x^p \mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad \int (ax+b)^p \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C, \quad \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C,$$

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C, \quad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a,\ a \neq 1)$$

５．積分

(1) 関数の不定積分（続き）

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \cos x + x\sin x + C$$

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{x}^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int \log_a x\,\mathrm{d}x = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + C \quad (0 < a,\ a \neq 1)$$

(2) 組合せ関数の不定積分

$$\int \left\{ \mathrm{f}(x) \right\}^{p} \mathrm{f}'(x)\mathrm{d}x = \frac{\left\{ \mathrm{f}(x) \right\}^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)}\mathrm{d}x = \ln\left|\mathrm{f}(x)\right| + C$$

$$\alpha = \mathrm{g}(x), \quad \int \mathrm{f}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int \mathrm{f}\left\{\mathrm{g}(x)\right\}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{f}\left\{\mathrm{g}(x)\right\}\mathrm{g}'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{f}(x)\mathrm{g}'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x) - \int \mathrm{f}'(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{g}(x) = x \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{f}(x) - \int x\,\mathrm{f}'(x)\mathrm{d}x$$

５．積分

(3) 様々な定積分

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\mathrm{d}x = a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\mathrm{d}x = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{4a} \quad (0<a) \qquad \int_0^\infty \frac{a\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2} \quad (0<a)$$

$$\int_0^{pa} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{\varphi}{a} \quad (0<a, 0<p, \varphi=\tan^{-1}p, 0<\varphi<\frac{\pi}{2})$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (0<a)$$

$$\int_0^{2\pi/k} \cos kx\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^{2\pi/k} \sin kx\mathrm{d}x = 0 \quad (k\neq 0)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(3) 様々な定積分（続き）

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \ (m \neq n) \\ \pi \ (m = n) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \ (m \neq n) \\ \pi/2 \ (m = n) \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 \ (m + n = \mathrm{even}) \\ \dfrac{2m}{m^2 - n^2} \ (m + n = \mathrm{odd}) \end{cases}$$

６．数列・級数

(1) 等差数列

初項をａ１、公差をｄとする。

一般項 $$a_n = a_1 + (n-1)d$$

数列の和 $$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left\{2a_1 + (n-1)d\right\}$$

(2) 等比数列

初項をａ１、公比をｒとする。

一般項 $$a_n = a_1 r^{n-1}$$

数列の和 $$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

$$S_n = na_1 \quad (r = 1)$$

無限等比数列の和（但し|ｒ|＜１）

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

６．数列・級数

(3) 関数のテーラー展開

$$(1\pm x)^{-1}=1\mp x+x^{2}\mp x^{3}+x^{4}\mp\cdots\quad(|x|<1)$$

$$(1\pm x)^{-2}=1\mp 2x+3x^{2}\mp 4x^{3}+5x^{4}\mp\cdots\quad(|x|<1)$$

$$(1+x)^{k}=1+kx+\frac{1}{2}k(k-1)x^{2}+\cdots\quad(|x|<1)$$

$$\mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{4!}x^{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}$$

$$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2!}x^{2}-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{4!}x^{4}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x^{3}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n}\quad(-1<n\leq 1)$$

６．数列・級数

(3) 関数のテーラー展開（続き）

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

7．ベクトル解析

(1) 内積・外積

$$\vec{\mathbf{A}} = (x_a, y_a, z_a), \quad \vec{\mathbf{B}} = (x_b, y_b, z_b)$$

ΘをA、Bのなす角とする

内積： $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \left|\vec{\mathbf{A}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{B}}\right| \cos\theta = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

内積について、以下が成り立つ

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \left|\vec{\mathbf{A}}\right|^2, \quad \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}, \quad k(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) = (k\vec{\mathbf{A}}) \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} \cdot (k\vec{\mathbf{B}})$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$$

外積：

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (y_a z_b - z_a y_b)\mathbf{i_x} + (z_a x_b - x_a z_b)\mathbf{i_y} + (x_a y_b - y_a x_b)\mathbf{i_z}$$

外積について、以下が成り立つ

$$\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = \left|\vec{\mathbf{A}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{B}}\right| \sin\theta, \quad \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}},$$

$$k(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = (k\vec{\mathbf{A}}) \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} \times (k\vec{\mathbf{B}}), \quad \vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

7．ベクトル解析

(2) 座標変換

2次元平面　x , y ⇔ r ,θ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i_r} \\ \mathbf{i_\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i_x} \\ \mathbf{i_y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{i_x} \\ \mathbf{i_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i_r} \\ \mathbf{i_\theta} \end{pmatrix}$$

x , y → r ,θ　　　　r ,θ→ x , y

3次元空間　x , y , z → r ,θ, z （円筒座標）

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i_r} \\ \mathbf{i_\varphi} \\ \mathbf{i_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i_x} \\ \mathbf{i_y} \\ \mathbf{i_z} \end{pmatrix}$$

3次元空間　x , y , z → r ,θ,ψ（球面座標）

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i_r} \\ \mathbf{i_\theta} \\ \mathbf{i_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i_x} \\ \mathbf{i_y} \\ \mathbf{i_z} \end{pmatrix}$$

(3) スカラー関数の勾配

$$\nabla = \mathbf{i}_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathrm{grad}\,\phi = \nabla \phi = \mathbf{i}_{\mathbf{x}} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{i}_{\mathbf{y}} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{i}_{\mathbf{z}} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

(4) ベクトル関数の発散

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x_a}{\partial x} + \frac{\partial y_a}{\partial y} + \frac{\partial z_a}{\partial z}$$

(5) ベクトル関数の回転

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i}_{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

(6) ベクトル積分の公式

閉曲面Ｓが包む体積Ｖについて、

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

なるベクトルＦがあって、これをＶについて積分したものについて下記が成り立つ。
（ガウスの積分定理）

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\cdot d\,V = \int_S \mathbf{A}\cdot d\,\mathbf{S}$$

閉曲線Ｃが囲む面積Ｓについて、

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \left(\nabla\times\mathbf{A}\right)\cdot d\mathbf{S}$$

が成り立つ。（ストークスの定理）

８．フーリエ変換

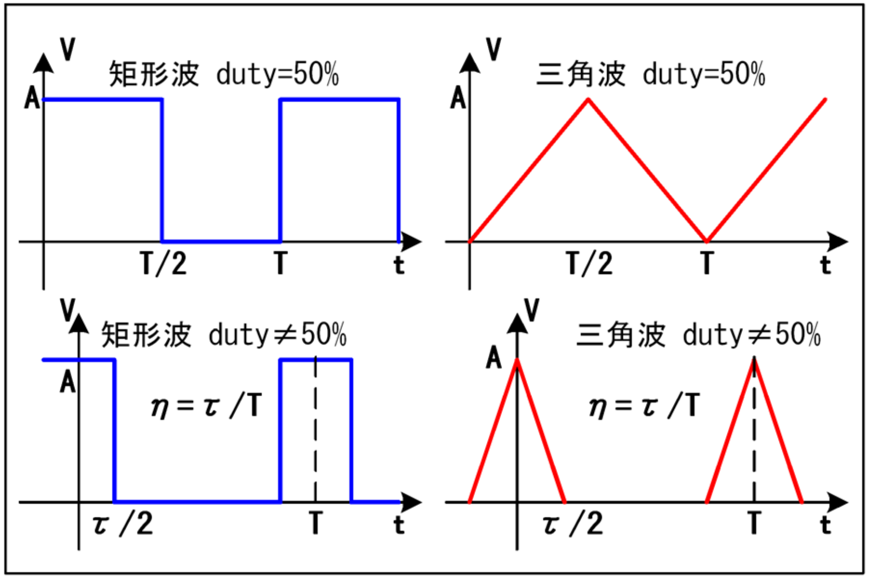
(1) フーリエ級数

・矩形波のフーリエ級数展開
周期Ｔ、振幅Ａ、デューティー50%

$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}(2n-1)t\right\}}{2n-1}$$

デューティー比ηが50%でない場合
（$\eta=\tau/\mathrm{T}$）

$$\eta A+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\eta n\pi}{n}\cos\frac{2n\pi t}{T}$$



・三角波のフーリエ級数展開
周期Ｔ、振幅Ａ、デューティー50%

$$\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left\{\dfrac{2\pi}{T}(2n-1)t\right\}}{(2n-1)^2}$$

８．フーリエ変換

(1) フーリエ級数（続き）

デューティーが50%でない場合（$\eta = \tau / T$）

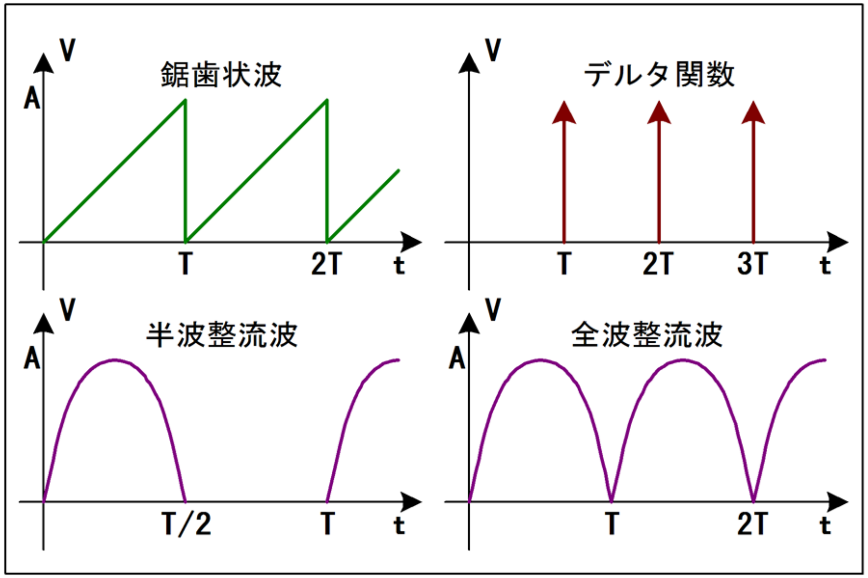
$$\frac{\eta A}{2} - \eta A \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{\sin(\eta n \pi / 2)}{\eta n \pi / 2} \right\}^2 \cos \frac{2 n \pi t}{T} \right]$$

・鋸歯状波のフーリエ級数展開
周期Ｔ、振幅Ａ

$$\frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2 n \pi t}{T}}{n}$$

・周期デルタ関数のフーリエ級数展開
周期Ｔ

$$\frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2 \pi n t}{T}$$



９．フーリエ解析

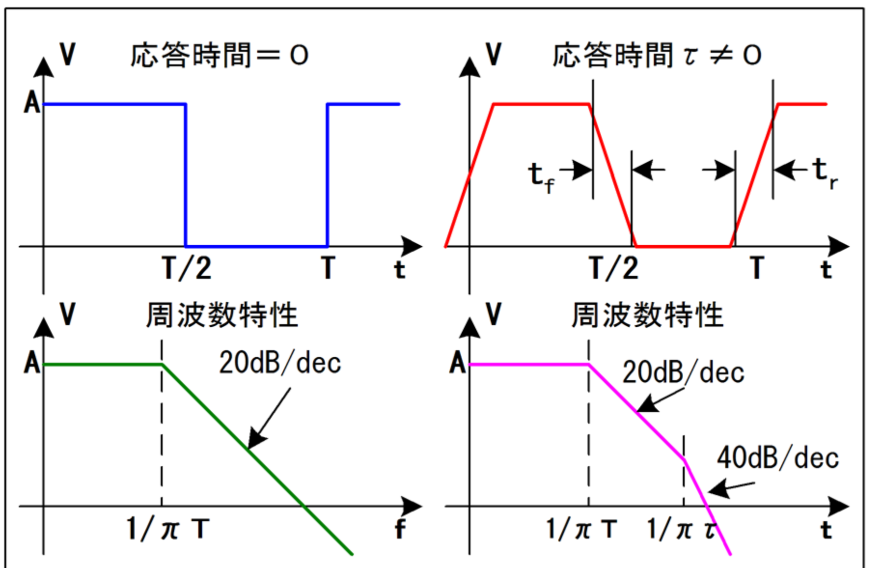
(1) フーリエ級数（続き）

・半波整流波のフーリエ級数展開
周期Ｔ、振幅Ａ

$$\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin\frac{2\pi t}{T}-\frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos\frac{4n\pi t}{T}}{4n^2-1}$$

・全波整流波のフーリエ級数展開
周期Ｔ、振幅Ａ

$$\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{4n\pi t}{T}}{4n^2-1}$$



・デューティー50%の台形波のフーリエ級数展開
周期Ｔ、振幅Ａ、立上り時間＝立下り時間＝τとすると、周波数特性は

DC～1/πＴ　はフラット

1/πＴ～1/πτ　は20dB/dec

1/πＴ～　は40dB/dec

９．フーリエ解析

(1) フーリエ級数（続き）

・振幅が一定とみなせる範囲

周期Ｔ、パルス幅ｔ、立上り／立下り時間＝０の矩形波ではｆ$_0$＝1/Ｔとして、

$$nf_0 \leq \frac{1}{\pi t}$$

（ｎ：高調波の次数）

デューティー比η（＝ｔ/Ｔ）を使って書けば、

$$n \leq \frac{1}{\pi \eta}$$

・パーシバルの等式

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[f(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

意味…**ある信号の平均電力は、各スペクトルの電力の和に等しい**

９．フーリエ解析

(2) フーリエ変換・逆変換

・定義
関数ｆ（ｔ）のフーリエ変換Ｆ（ω）を次のように定義する。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

関数Ｆ（ω）の逆フーリエ変換ｆ（ｔ）を次のように定義する。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

・矩形波パルスのフーリエ変換
パルス幅τ、振幅Ａの（ｙ軸中心の）
矩形波パルス

$$F(\omega)=A\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

・三角波パルスのフーリエ変換
パルス幅２τ、振幅Ａの（ｙ軸中心の）
矩形波パルス

$$F(\omega)=A\tau\left\{\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right\}^2$$

９．フーリエ解析

(2) フーリエ変換・逆変換（続き）

フーリエ変換の性質と様々な関数のフーリエ変換

$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
$f(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a \rvert} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
$f(-t)$	$F(-\omega)$
$f(t - t_0)$	$F(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega t_0}$
$f(t)\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t)\cos\omega_0 t$	$\{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)\}/2$
$f(t)\sin\omega_0 t$	$\{F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)\}/2j$
$\{f(t) + f(-t)\}/2$	$\mathrm{Re}[F(\omega)]$
$\{f(t) - f(-t)\}/2$	$j\,\mathrm{Im}[F(\omega)]$

9．フーリエ解析

(2) フーリエ変換・逆変換（続き）

$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f'(t)$	$j\omega F(\omega)$
$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$	$\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$
$-jtf(t)$	$F'(\omega)$
$(-jt)^n f(t)$	$F^{(n)}(\omega)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(t-x)\mathrm{d}x$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
$f_1(x)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(y)F_2(\omega-y)\mathrm{d}y$
$\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$\frac{1}{j\omega+a}$

９．フーリエ解析

(2) フーリエ変換・逆変換（続き）

$\mathrm{e}^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/4a}$
時間幅ａ、振幅１の矩形波ｐ$_{\text{ａ}}$（ｔ）	$\dfrac{a\sin(\omega a/2)}{(\omega a/2)}$
$t\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{(j\omega + a)^2}$
$\dfrac{\sin at}{\pi t}$	$p_{2a}(\omega)$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{(j\omega + a)^n}$

９．フーリエ解析

(2) フーリエ変換・逆変換（続き）

$e^{-at}\sin bt\cdot u(t)$	$\dfrac{b}{(j\omega+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\cos bt\cdot u(t)$	$\dfrac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+b^2}$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$\dfrac{\cos bt}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{2a}\left(e^{-a\lvert\omega-b\rvert}+e^{-a\lvert\omega+b\rvert}\right)$
$\dfrac{\sin bt}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{j2a}\left(e^{-a\lvert\omega-b\rvert}-e^{-a\lvert\omega+b\rvert}\right)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$

９．フーリエ解析

(2) フーリエ変換・逆変換（続き）

$\delta'(t)$	$j\omega$
$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
$\mathrm{u}(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/j\omega$
$\mathrm{u}(t-t_0)$	$\pi\delta(\omega)+\mathrm{e}^{-j\omega t_0}/j\omega$
１	$2\pi\delta(\omega)$
ｔ	$2\pi j\delta'(\omega)$
ｔ ⁿ	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
$\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

９．フーリエ解析

(2) フーリエ変換・逆変換（続き）

$$\cos\omega_0 t\cdot \mathrm{u}(t) \qquad \frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\sin\omega_0 t\cdot \mathrm{u}(t) \qquad \frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$t\,\mathrm{u}(t) \qquad j\pi\,\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$$

$$1/t \qquad j\pi-j2\pi\,\mathrm{u}(\omega)$$

$$1/t^n \qquad \frac{(-j\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\left[j\pi-j2\pi\,\mathrm{u}(\omega)\right]$$

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \qquad \omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

デルタ関数列

９．フーリエ解析

(2) フーリエ変換・逆変換（続き）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) \mathrm{d}\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega$$